



MASTER EN INGENIERÍA SÍSMICA

MÉTODOS GENERALES DE CÁLCULO
SISTEMAS DISCRETOS Y CONTINUOS

Prof. Mª del Sagrario Gómez Lera
Dr. Ingeniero Industrial
Catedrático de la U.P.M.
Octubre 2010

FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS DINÁMICO

Mª S. GÓMEZ LERA
E. ALARCÓN ÁLVAREZ

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA ESTRUCTURAL Y CONSTRUCCIONES INDUSTRIALES

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

CAPÍTULO I

SISTEMAS CON UN GRADO DE LIBERTAD

1.1.- CONCEPTOS BÁSICOS

1.2.- VIBRACIONES LIBRES

1.3.- VIBRACIONES FORZADAS

1.1.- CONCEPTOS BÁSICOS

1.1.1.– INTRODUCCIÓN

Un paso previo al estudio de los métodos existentes para analizar la respuesta de un sistema estructural ante solicitaciones sísmicas, es la comprensión de las características de la respuesta de la estructura ante una solicitación dinámica de tipo general.

El comportamiento dinámico difiere del estático en dos aspectos fundamentales. El primero de ellos se refiere a la dependencia con el tiempo de la solicitación, lo que lleva consigo la determinación de la respuesta en cada uno de los intervalos de tiempo de actuación de la carga.

Sin embargo, la diferencia más significativa entre el comportamiento estático y dinámico de una estructura radica en la aparición, durante el movimiento, de fuerzas de inercia relacionadas con la masa del sistema. El juego entre la energía cinética de las masas y la energía potencial almacenada en la estructura es el factor que controla el movimiento y el cociente entre rigidez y masa está relacionado con una magnitud característica de los sistemas lineales: **la frecuencia de oscilación.**

Un ejemplo clásico de la importancia que puede tener esta combinación de fuerzas elásticas y de inercia es el colapso producido en un puente de acero en Broughton (1831), por las vibraciones inducidas por un grupo de 60 soldados al atravesarlo marcando el paso; consecuencia de este accidente fue la colocación de carteles informativos (figura 1.1), indicando la conveniencia de romper el paso de las tropas cuando hubieran de atravesar un puente.

En este ejemplo, los soldados aplican sobre el puente una fuerza con una determinada frecuencia que produce el movimiento del sistema; consecuencia de este movimiento y siguiendo la 2ª Ley de Newton, es la aparición de unas fuerzas de inercia proporcionales a la aceleración, estas fuerzas alejan al puente de su posición de equilibrio; por otra parte, entran en acción las fuerzas elásticas que deberán equilibrar no sólo el sistema de solicitaciones exteriores sino también a las fuerzas de inercia, devolviendo al puente a su posición de equilibrio. Resultando, en consecuencia, una oscilación del sistema alrededor de la citada posición con una frecuencia que depende de las características inerciales y elásticas del sistema; esta tendencia a la vibración se agrava, como se verá más adelante, cuando la frecuencia de oscilación del sistema coincide con la frecuencia de la excitación, como ocurrió en esta desafortunada situación.

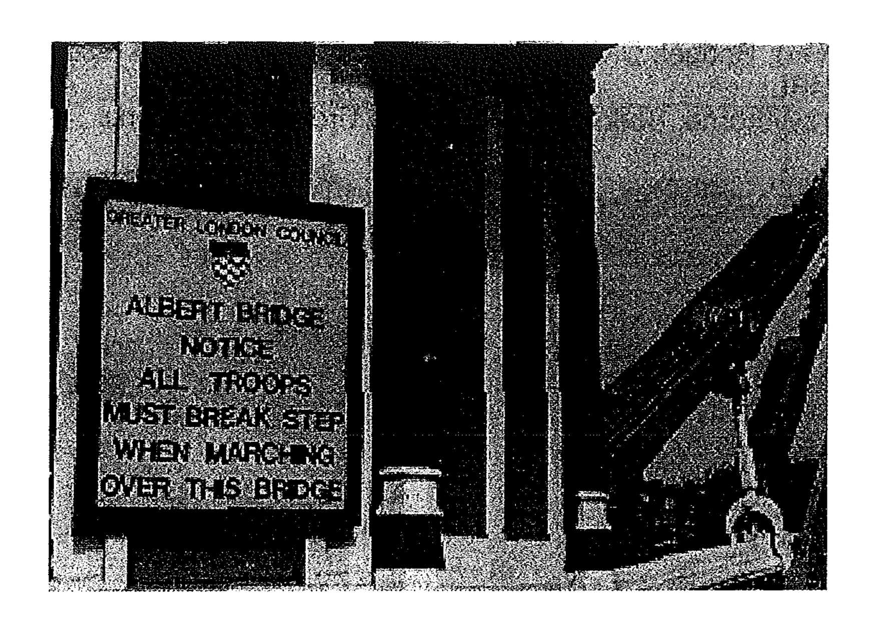


Fig. 1.1 “Albert Bridge”Londres

1.1.2.- MOVIMIENTO PERIÓDICO

OSCILACION O VIBRACION: Es el fenómeno que caracteriza el cambio cíclico de la posición de un sistema alrededor de una referencia a intervalos regulares de tiempo.

Si se designa por **x(t)** al desplazamiento de un sistema, en el instante **t**; un movimiento vibratorio viene caracterizado mediante la ecuación:

$$\mathbf{x(t) = x(t+T)} \qquad (1.1\text{-}1)$$

en la figura 1.2 se representa el desplazamiento, en función del tiempo, provocado en la cimentación soporte de una turbina de gas.

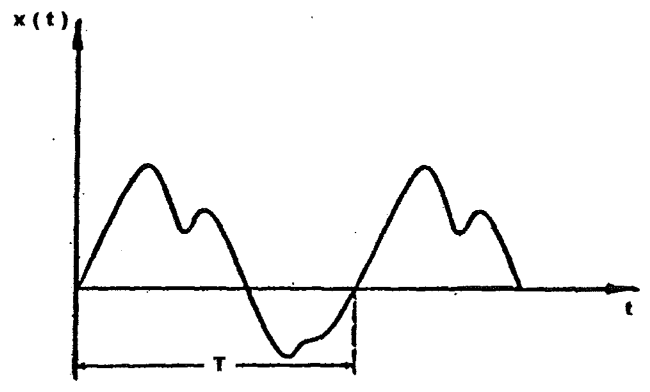


Figura 1.2

PERÍODO: Es el tiempo, T, que tarda una partícula del sistema en realizar una vibración completa, es habitual medirlo en **segundos.**

En general si x(t) es una función periódica de período T, su desarrollo en serie de Fourier es

si $f(x)$ = par $\Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow b_n = 0$
si $f(x)$ = impar $\Rightarrow f(x) = -f(-x) \Rightarrow a_n = 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \ldots \\ &+ b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + \ldots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t \right) \end{aligned}$$

donde

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t)\, dt = \frac{2}{T} \int_0^{T} x(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \cos n\omega t\, dt = \frac{2}{T} \int_0^{T} x(t) \cos n\omega t\, dt$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \operatorname{sen} n\omega t\, dt = \frac{2}{T} \int_0^{T} x(t) \operatorname{sen} n\omega t\, dt$$

Las funciones

$$a_n = \cos n\omega t$$
$$b_n = \operatorname{sen} n\omega t$$

se denominan armónicos de orden n de la función periódica x(t), siendo su período T/n.

1.1.3.- MOVIMIENTO ARMÒNICO

La forma más simple de un movimiento periódico recibe el nombre de Movimiento Armónico, siendo la ecuación que describe el citado movimiento:

$$x(t) = A \operatorname{sen} \omega t \qquad (1.1\text{-}2)$$

donde:

t representa el tiempo
A valor máximo del desplazamiento, se designa por **amplitud**
ω **frecuencia circular o pulsación**, se expresa en radianes por segundo (rd/seg).

Se define la ***FRECUENCIA (f)***, como el número de oscilaciones completas realizadas en la unidad de tiempo, siendo la inversa del período, T; es decir:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (1.1\text{-}3)$$

se mide en **ciclos por segundo (HERTZ)**

El movimiento de la masa **m** provocado por el mecanismo indicado en la Figura 1.3, es un ejemplo de movimiento armónico.

Este sistema, típico de las máquinas de coser, consta de una manivela de radio A, unida en uno de sus extremos a un punto O alrededor del cual gira; el otro extremo P desliza sobre una biela de guía vertical R. Al girar la manivela con una velocidad angular ω, el punto S y por tanto la masa m, se desplaza una cantidad que viene dada por:

$$\mathbf{x = A\,sen\,\theta = A\,sen\,\omega t}$$

siendo la velocidad:

$$\mathbf{\dot{x} = \omega A\,cos\,\omega t}$$

y la aceleración:

$$\mathbf{x = -\,\omega^2 A\,sen\,\omega t = -\omega^2 x}$$

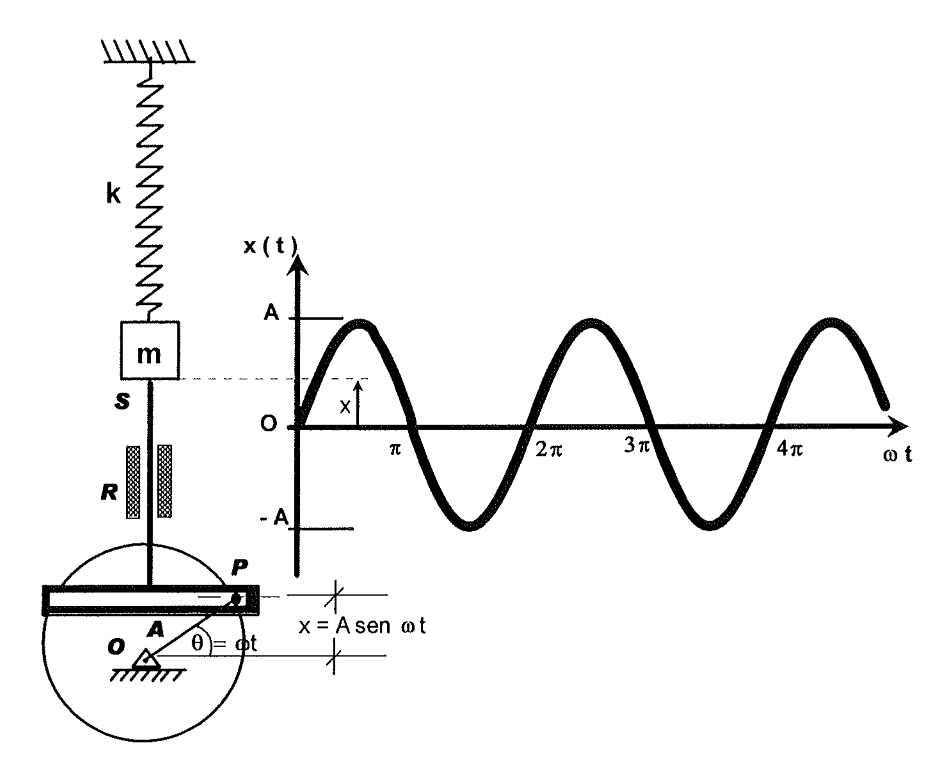


Fig.1.3

1.1.4.– REPRESENTACION DE UN MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMÓNICO

El movimiento vibratorio armónico, suele representarse mediante la proyección, sobre una línea recta, de un vector OP, de módulo A que gira a una velocidad angular constante ω

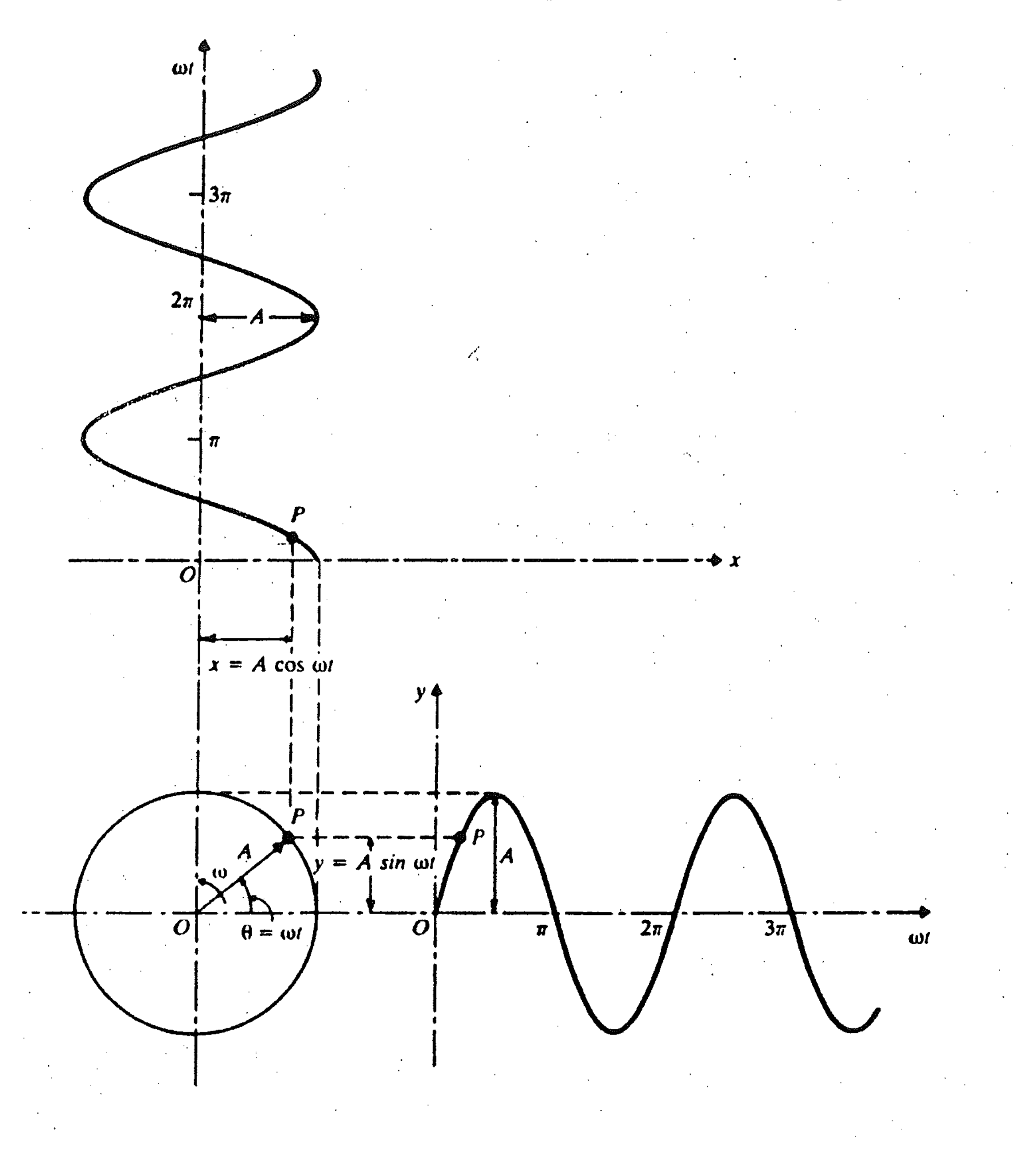


Fig. 1.4

En la Figura 1.4, se representan las proyecciones horizontal y vertical del vector OP, al que se ha designado por X:

- Proyección horizontal

$$\mathbf{x(t) = A\ cos\,\omega t} \qquad (1.1\text{-}4)$$

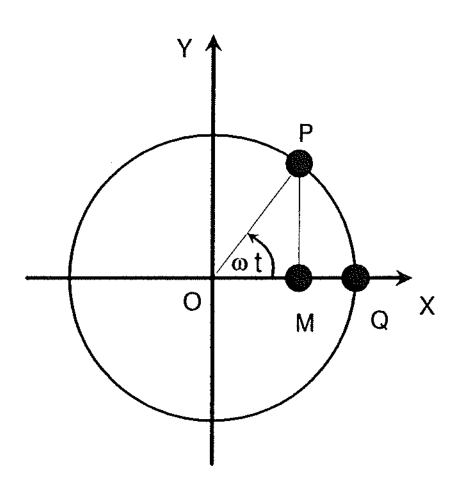
- Proyección vertical

$$\mathbf{x(t) = A\ sen\,\omega t} \qquad (1.1\text{-}5)$$

Tomando la proyección horizontal, pueden presentarse las siguientes situaciones:

(1): Si para t = 0, el punto P se encuentra en Q, el punto M proyección del P sobre el eje X, tendrá por abscisa:

$$\mathbf{x = A\cos\,\omega t}$$

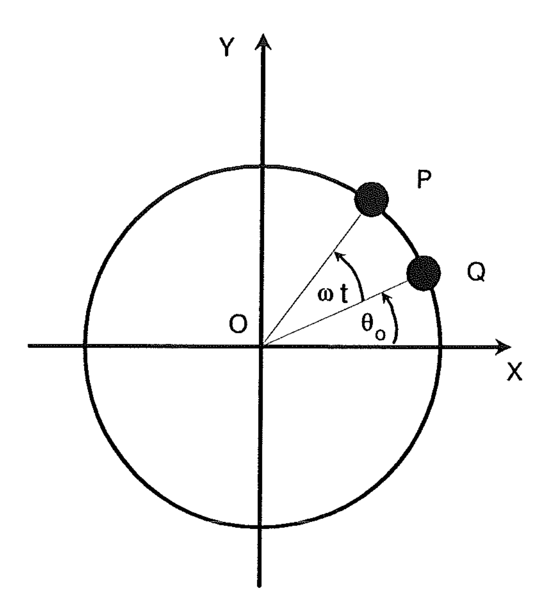


(2): Si para t = 0, el punto P se encuentra en Q, entonces

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

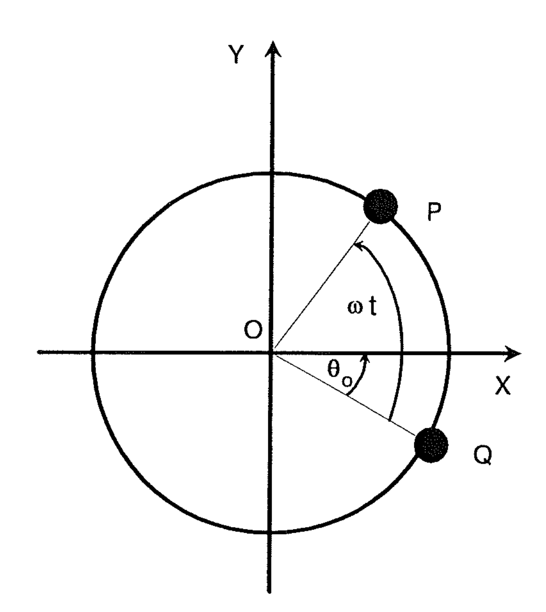
siendo θ_0 el valor de θ para t = 0; y la proyección del punto P sobre el eje X, tomará el valor

$$\mathbf{x = A\cos\left(\omega t + \theta_0\right)}$$



(3): Si para t = 0, el punto P se encuentra en Q, entonces

$$\mathbf{x = A\cos(\omega t - \theta_0)}$$



El ángulo θ_0 recibe el nombre de **FASE INICIAL**, o ángulo con el que se inicia el movimiento

La velocidad y aceleración del movimiento armónico, se obtendrán diferenciando las ecuaciones (1.1-4) ó (1.1-5); así para un desplazamiento:

$$\mathbf{x(t) = A\cos\omega t}$$

se obtiene

$$\dot{x}(t) = -A \operatorname{sen} \omega t = \frac{dx}{dt} \qquad (1.1\text{-}6)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos \omega t = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1.1\text{-}7)$$

A la vista de lo anterior, puede observarse que la velocidad y aceleración son también armónicas, con la misma frecuencia y amplitudes, Aω y Aω², respectivamente; estando desfasadas, respecto al desplazamiento en π/2 y π radianes.

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\ddot{x}(t) = A\omega^2 \cos(\omega t + \pi)$$

Una representación de las relaciones (1.1-4), (1.1-6) y (1.1-7), se obtiene mediante el diagrama de ARGAND, indicado en la Figura 1.5.

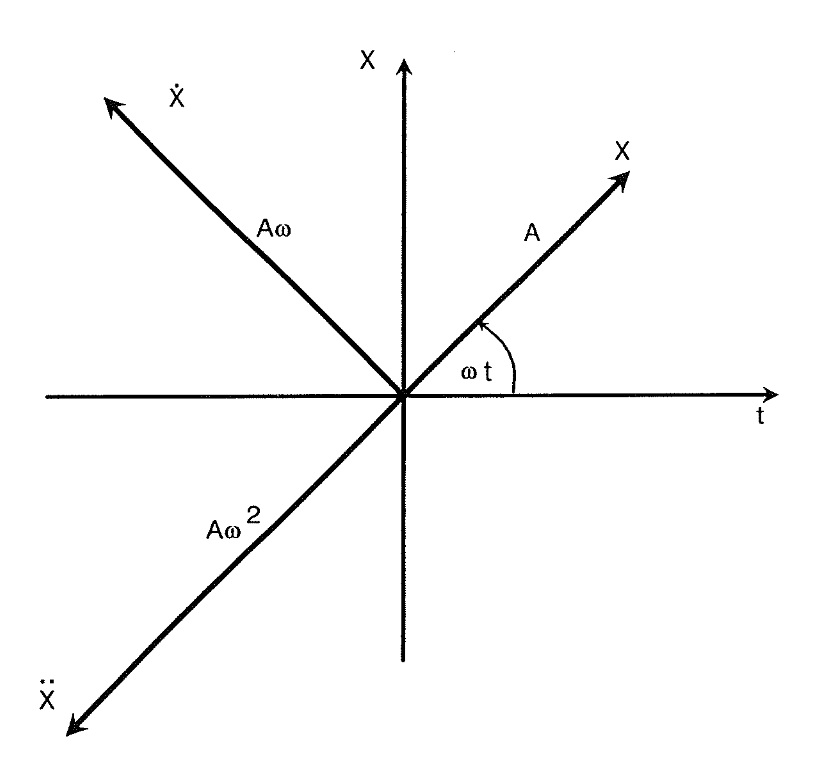


Fig. 1.5

Como puede observarse, la aceleración tiene signo opuesto al desplazamiento; si no fuese así, el movimiento vibratorio no se produciría; debe tenerse en cuenta que una aceleración negativa es una deceleración, esto es, el punto que oscila tiende a la posición de equilibrio.

En la Figura 1.6, se indica la variación, con ωt, del desplazamiento

$$\mathbf{u = u_0 \ sen \ \omega t}$$

velocidad

$$\mathbf{\dot{u} = u_0 \ \omega \cos \omega t}$$

y aceleración

$$\mathbf{\ddot{u} = u_0 \ \omega^2 \ sen \ \omega t}$$

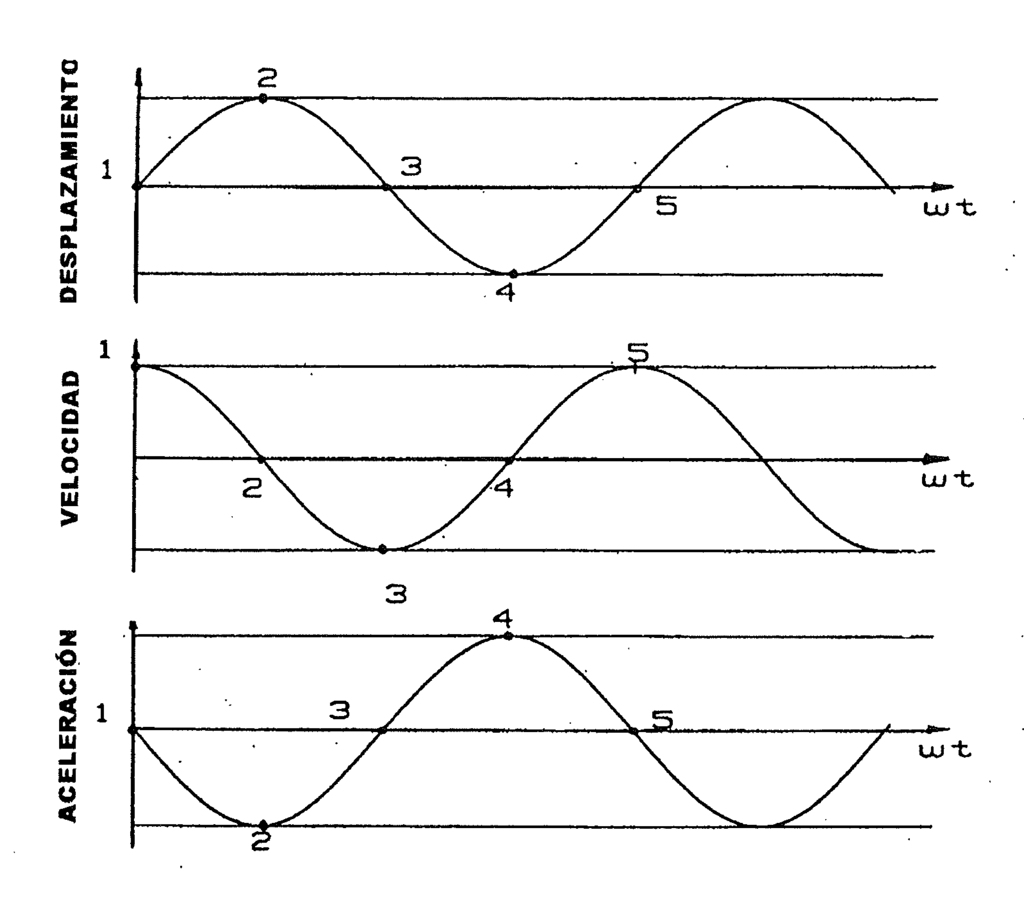


Fig.1.6

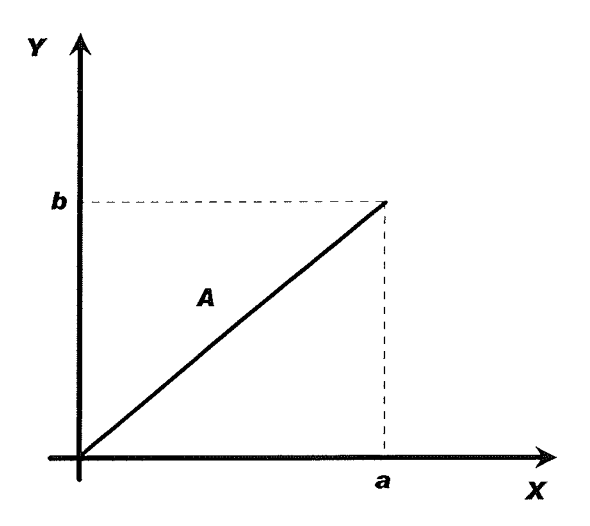
Un movimiento armónico admite también una representación mediante números complejos. En efecto, cualquier vector, X, en el plano XY puede expresarse mediante un número complejo

$$\mathbf{X = a + ib}$$

siendo **i**, la unidad imaginaria

$$\mathbf{i = \sqrt{-1}}$$

y a, b las componentes real e imaginaria de x que representan sus proyecciones sobre los ejes x e y



Si se designa por A al módulo de X y por φ a su argumento, puede escribirse:

$$\mathbf{X = Ae^{i\varphi} = A(\cos\varphi + i\,sen\,\varphi)} \qquad (1.1\text{-}8)$$

$$\mathbf{A = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\mathbf{\varphi = arctg\,\frac{b}{a}}$$

Diferenciando (1.1-8) se obtiene

$$\mathbf{\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{i\omega t}) = i\omega A e^{i\omega t} = i\omega X}$$

$$\mathbf{\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d}{dt}(i\omega Ae^{i\omega t}) = -\omega^2 A e^{i\omega t} = -\omega^2 X}$$

Si el desplazamiento viene representado como

$$I_m\left[A e^{i\omega t}\right] = A \text{ sen } \omega t$$

entonces

$$\text{velocidad} = I_m\left[i\omega A e^{i\omega t}\right] = \omega A \text{ sen } (\omega t + \frac{\pi}{2})$$
$$\text{aceleración} = I_m\left[-\omega^2 A e^{i\omega t}\right] = \omega^2 A \text{ sen } (\omega t + \pi)$$

Es decir: "*el movimiento es la proyección sobre el eje imaginario de un vector complejo de módulo A*".

O bien, sí:

$$\text{desplazamiento} = R_e\left[A e^{i\omega t}\right] = A \cos \omega t$$

resulta que:

$$\text{velocidad} = R_e\left[i\omega A e^{i\omega t}\right] = -\omega A \text{ sen } \omega t = \omega A \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$
$$\text{aceleración} = R_e\left[-\omega^2 A e^{i\omega t}\right] = -\omega^2 A \cos \omega t = \omega^2 A \cos(\omega t + \pi)$$

1.1.5.– RELACION ENTRE LA FASE Y LAS CONDICIONES INICIALES

Si la ecuación que caracteriza al movimiento puede describirse mediante la relación

$$y(t) = A\, \omega \text{ sen}(\omega t + \phi)$$

y si se designa por y_0 e $\dot{y}_0$ al desplazamiento y velocidad en el instante inicial, t = 0, se tiene que al ser

$$\dot{y}(t) = A\, \omega \cos(\omega t + \phi)$$

en t = 0, puede escribirse

$$y_0 = A \text{ sen } \phi$$

$$\dot{y}_0 = A\, \omega \cos \phi$$

por lo que el ángulo de fase será

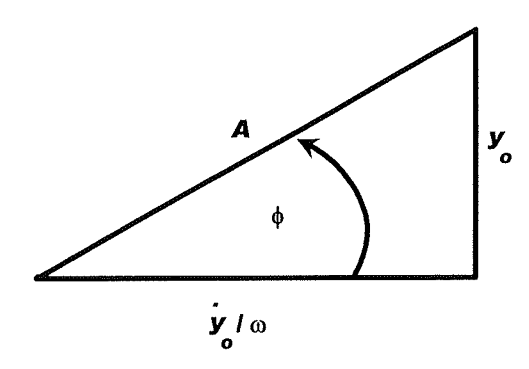
$$\phi = \mathbf{arc\,tag}\frac{y_0\,\omega}{\dot{y}_0}$$

y la amplitud del desplazamiento, A, se obtendrá al tener en cuenta que

$$\left[\frac{y_0}{A}\right]^2 + \left[\frac{\dot{y}_0}{A\omega}\right]^2 = 1$$

es decir

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2}}$$



1.1.6.- MODELOS PARA SISTEMAS DINÁMICOS

Se denominan coordenadas de una estructura, al número de parámetros que es preciso especificar para determinar su posición en cada instante de tiempo; y grados de libertad (g.d.l) a las coordenadas que resultan después de descontar las condiciones de enlace. Por las razones anteriormente expuestas, *en el cálculo dinámico los g.d.l. a considerar serán aquellos directamente relacionados con la distribución de masa del sistema*; así, una estructura con una distribución continua de masa, tendrá un número infinito de g.d.l. Afortunadamente, en la mayoría de los casos, el movimiento del sistema estructural es tal que sólo es necesario especificar los N g.d.l. más significativos. A este tipo de sistemas se les denomina sistemas con N g.d.l.; utilizándose también, para el caso lineal, el apelativo oscilador lineal múltiple (o.l.m.).

La respuesta dinámica de algunos sistemas estructurales puede analizarse con la consideración de un único g.d.l.; es decir, sólo es necesario especificar una coordenada para describir su movimiento, lo cual no implica que no puedan producirse otros movimientos, sino que estos son despreciables frente al asignado a la precitada coordenada.

En la figura 1.7.(a) se representa un modelo de una plataforma marina, en el que la pesada plataforma superior se ha reemplazado por una masa m, mientras que la estructura soporte proporciona la rigidez lateral suficiente contra el viento y oleaje; por lo que puede considerarse como un muelle de constante elástica k.

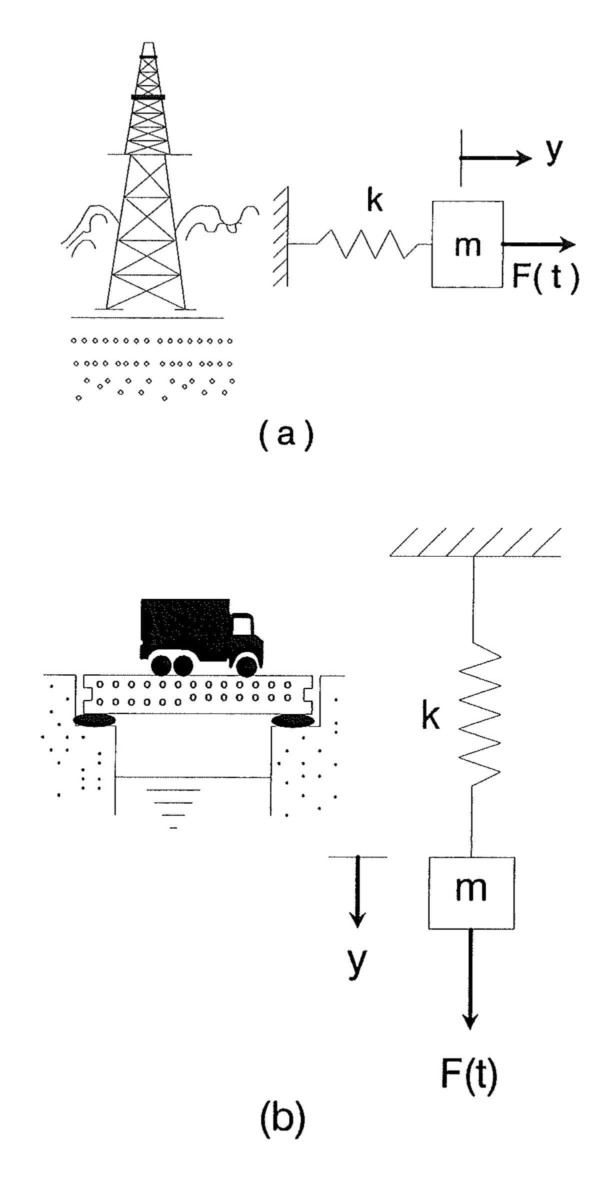


Fig.1.7

De una forma análoga el puente representado en la Figura 1.7.(b), puede modelizarse mediante un sistema con g.d.l., que represente el movimiento vertical que sobre el centro del mismo provoca el paso de un vehículo.

La Figura 1.8.(a) representa una construcción de una sola planta sometida a una explosión; un modelo de la estructura se indica en la Figura 1.8.(b), dicho modelo supone a los pilares flexibles a las deformaciones laterales y sin masa; concentrando la masa total del sistema en un dintel rígido.

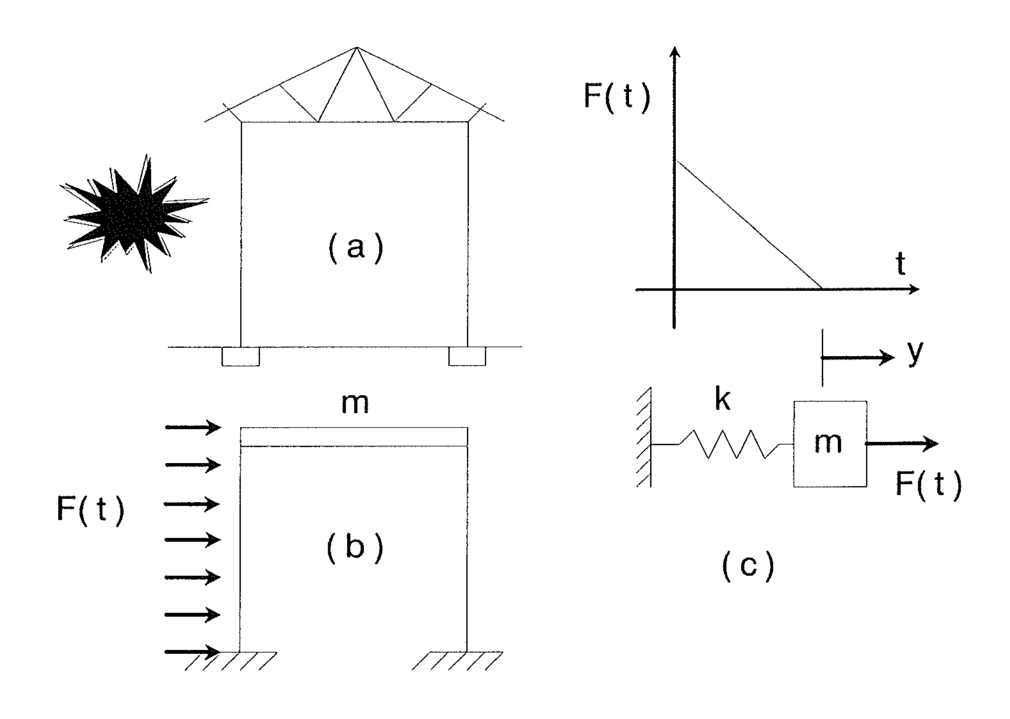


Fig.1.8

En todos los casos citados, la solicitación exterior varía con el tiempo y los movimientos más representativos se reducen a uno sólo.

En resumen, para el oscilador lineal, se supondrá la existencia de una sola masa cuya situación queda determinada por una variable de posición, $\mathbf{y(t)}$, en cada instante t. Las derivadas respecto al tiempo de esta variable se indican mediante puntos; así, $\dot{\mathbf{y}}\mathbf{(t)}$ representa la velocidad e $\ddot{\mathbf{y}}\mathbf{(t)}$ la aceleración

1.1.7.– ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO

El equilibrio de una partícula de masa **m** puede escribirse como:

$$\mathbf{m\ddot{y}} = \sum \mathbf{F} \qquad (1.1\text{-}9)$$

donde:

m : es la masa

$\ddot{y}$: es la aceleración de la partícula

F : las fuerzas que actuan sobre ella

La expresión (1.1-9) puede interpretarse como el ESTADO GENERAL DE EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE RESULTANTE NULA, en cuyo caso el término, $-m\ \ddot{y}$, es la denominàda FUERZA DE INERCIA. Siendo la presencia de estas fuerzas de inercia; esto es, la MASA, lo que marca la diferencia entre los problemas estáticos y dinámicos.

Es usual considerar varios tipos de fuerzas F, y entre ellas:

a.- ***Solicitaciones que actúan sobre la partícula*** $\mathbf{f(t)}$

b.- Reacciones elásticas $\mathbf{-k\,y}$, donde **k** es una constante denominada COEFICIENTE DE RIGIDEZ

c.- Reacciones disipativas del tipo $\mathbf{-c\,\dot{y}}$, siendo **c** el denominado COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO

La Figura 1.9.(a) recoge el modelo típico de un sistema con 1 g.d.l

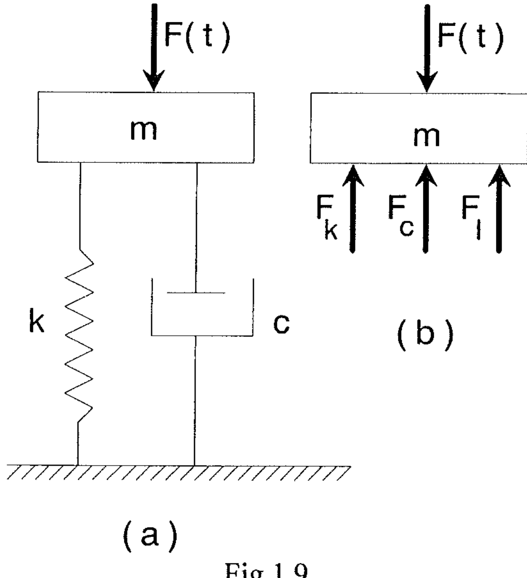


Fig.1.9

Dicho modelo está formado por una masa, m, unida a un soporte fijo por dos elementos en paralelo.

- Las características elásticas de la estructura se suponen representadas por la rigidez k de un muelle lineal de forma que para conseguir un desplazamiento relativo entre los extremos del mismo, es preciso actuar con una carga

$$\mathbf{F_k = k\, y(t)} \qquad (1.1\text{-}10)$$

- Se introduce en el modelo un amortiguador viscoso de constante c, tal que una velocidad relativa entre sus extremos, $\mathbf{\dot{y}(t)}$, sólo se consigue por aplicación de una fuerza

$$\mathbf{F_k = c\, \dot{y}(t)} \qquad (1.1\text{-}11)$$

Este amortiguador es la imagen de la disipación de energía observada en los sistemas reales; aunque la forma de representación está más relacionada con la sencillez introducida en el modelo que con la realidad física.

Otros tipos de amortiguamiento tienen un tratamiento matemático más complejo, que posteriormente será planteado en otros apartados.

En la Figura 1.9.(b) se representan las fuerzas elásticas F_k, de disipación F_c y de inercia F_I que actúan sobre el sistema excitado por una solicitación F(t) variable con el tiempo.

La respuesta y(t) del sistema se obtendrá resolviendo la ecuación del movimiento cuya escritura se consigue al poner el equilibrio de fuerzas actuante sobre el sistema. Así:

$$\mathbf{F_I + F_c + F_k = F(t)}$$

donde

$$\mathbf{F_I = m\ \ddot{y}(t)}$$

Es importante hacer notar que el cumplimiento lineal de (1.1-10) y (1.1-11) hace lineal también la ecuación diferencial de equilibrio obtenida al sustituir ambas expresiones en (1.1-9)

$$\mathbf{m\,\ddot{y}(t) + c\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = F(t)} \qquad (1.1\text{-}12)$$

Es usual, reservar nombres especiales para casos particulares de la ecuación (1.1-12):

VIBRACION LIBRE	*SIN AMORTIGUAMIENTO :*	$c = 0$
F(t) = 0	*AMORTIGUADAS :*	$c \neq 0$

VIBRACION FORZADA	*SIN AMORTIGUAMIENTO :*	$c = 0$
$F(t) \neq 0$	*AMORTIGUADAS :*	$c \neq 0$

1.2.– VIBRACIONES LIBRES

Se analiza en este apartado el movimiento vibratorio de sistemas sometidos a fuerzas inherentes a la propia estructura en ausencia de solicitaciones exteriores; es decir, cuando **F(t) = 0**

1.2.1.– VIBRACIONES LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO

En este caso, y al ser **c = 0** , el sistema consta de una masa y un muelle tal como se indica en la Figura 1.10

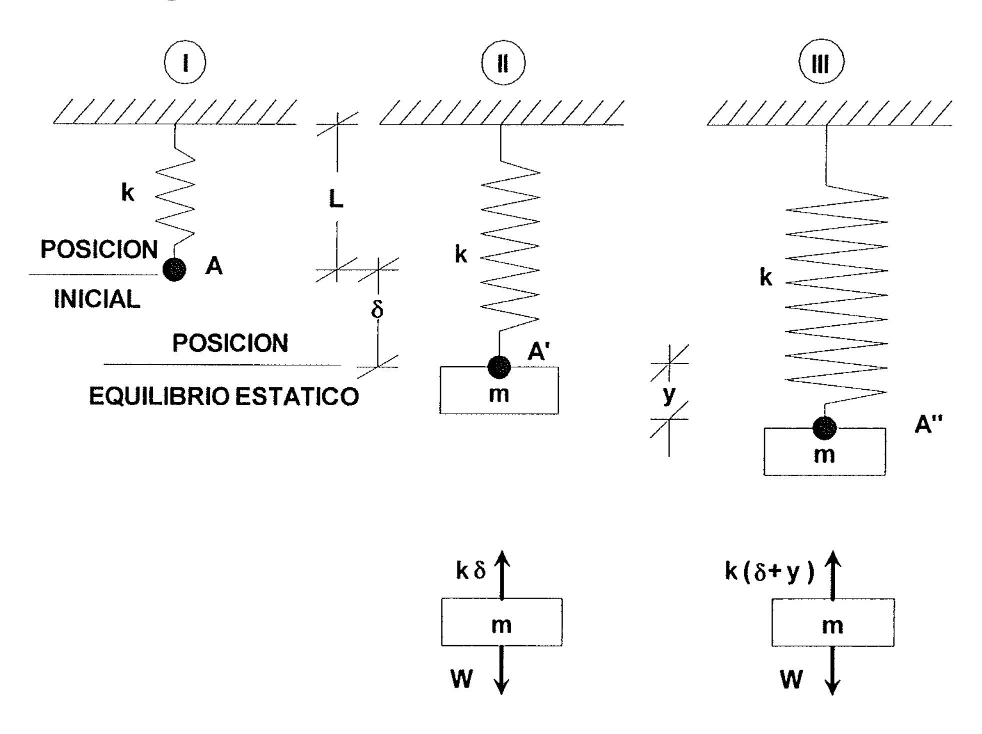


Fig.1.10

La figura 1.10-(I), representa un muelle de masa despreciable, longitud L y constante k (razón de la fuerza al alargamiento).

Si se sitúa una masa, m, en el extremo A (Posición Inicial), Figura 1.10-(II), se perturba el equilibrio del sistema, estableciéndose en una nueva posición A' obtenida como consecuencia de un alargamiento δ del muelle de forma que su longitud pasa a ser L + δ; esta nueva posición se habrá obtenido al considerar, por el Principio de Acción y Reacción, que el muelle ejercerá una fuerza hacia arriba igual y de signo contrario al peso del cuerpo, es decir,

$$-\mathbf{k}\,\delta + \omega = \mathbf{0}$$

o lo que es igual

$$\mathbf{w} = \mathbf{k}\,\delta \qquad (1.2\text{-}1)$$

donde δ es la deformación del muelle en su posición de equilibrio estático y se denomina FLECHA ESTÁTICA.

Si a partir de esta posición, y como consecuencia de algún desplazamiento, y(0), ó/y velocidad, $\dot{y}(0)$, la masa **m**, se desplaza una cantidad, **y**, la partícula oscilará alrededor de la posición de equilibrio estático.

Aplicando ahora la Segunda Ley de Newton: *"Cuando una fuerza actúa sobre un sistema produce en él un movimiento uniformemente acelerado, cuya aceleración es proporcional a la fuerza y de la misma dirección y sentido"*, puede escribirse

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}}$$

Por otra parte, la resultante de las fuerzas aplicadas sobre la masa **m** será:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{w} - \mathbf{k}(\delta + \mathbf{y})$$

Igualando las dos últimas expresiones, y teniendo en cuenta (1.2-1) puede escribirse

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}\,\mathbf{y} = \mathbf{0} \qquad (1.2\text{-}2)$$

Obsérvese que al tomar como referencia para, **y**, la posición de equilibrio estático, se elimina de la ecuación del movimiento: el Peso, **w**, y la Fuerza estática sobre el muelle, kδ

Dividiendo por **m** los dos miembros de (1.2-2), se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{y}} + \omega^2\,\mathbf{y} = \mathbf{0} \qquad (1.2\text{-}3)$$

donde ω^2 = K/m, y ω es la denominada FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA, que representa una medida entre los parámetros ELÁSTICO, k, e INERCIAL, m, del sistema.

La solución de (1.2-3) podrá encontrarse con soluciones particulares del tipo:

$$\begin{aligned} y &= C\,e^{rt} \\ \dot{y} &= C\,r\,e^{rt} \\ \ddot{y} &= C\,r^2\,e^{rt} \end{aligned} \qquad (1.2\text{-}4)$$

Sustituyendo (1.2-4) en (1.2-3) se obtiene la ecuación característica

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

cuya solución es:

$$r = \pm\ \omega\ \sqrt{-1} = \pm\ i\omega$$

por lo que

$$y = C_1\,e^{-i\omega t} + C_2\,e^{i\omega t}$$

o bien

$$y = A\,\mathrm{sen}\,\omega t + B\,\cos\omega t$$

siendo A y B constantes que dependerán de las condiciones iniciales; si éstas son

$$\begin{aligned} y(t=0) &= y_0 \\ \dot{y}(t=0) &= \dot{y}_0 \end{aligned}$$

se obtiene para (1.2-3)

$$y(t) = y_0\,\cos\omega t + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega}\right)\mathrm{sen}\,\omega t$$

Esto es, el sistema vibrará tal y como se indica en la Figura 1.11.

El sistema inicialmente en su posición de equilibrio (1) se mueve hacia la derecha hasta alcanzar el máximo desplazamiento, posición (2), a partir de la cual comienza a disminuir hasta alcanzar de nuevo la posición de equilibrio (3), punto de comienzo del movimiento del sistema hacia la izquierda hasta alcanzar la posición (4) en la que los desplazamientos comienzan a disminuir hasta alcanzar la posición de equilibrio (5), repitiéndose de nuevo el ciclo completo.

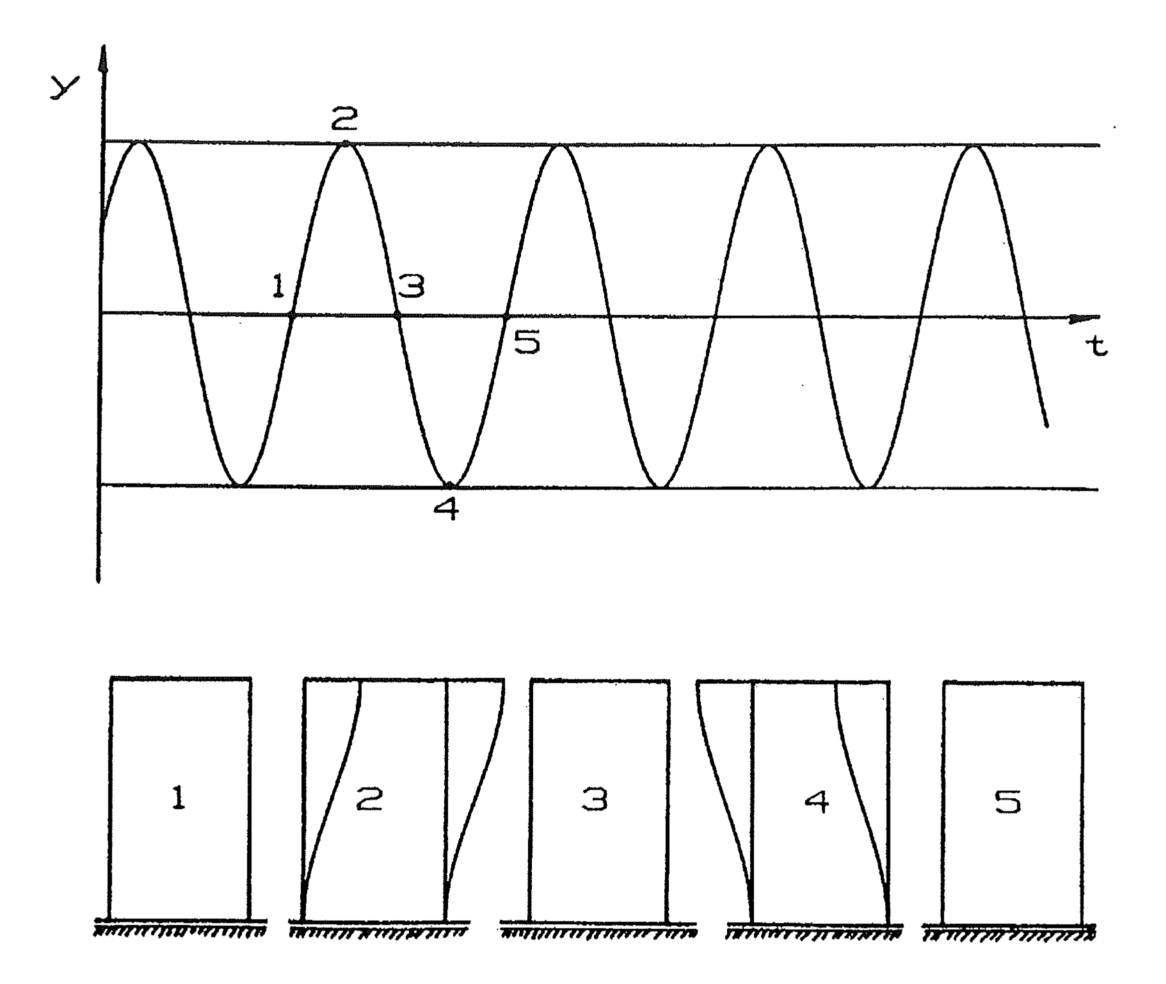


Fig. 1.11 Deformada del sistema en las posiciones 1, 2, 3, 4 y 5

Teniendo en cuenta lo anterior, es posible establecer un **BALANCE DE ENERGÍA,** lo que se consigue al multiplicar los dos términos de la ecuación (1.2-2) por la velocidad, $\dot{y}$.

$$\mathbf{m\,\dot{y}\;\;\ddot{y} + k\,\dot{y}\,y \;=\; 0}$$

o bien:

$$\mathbf{m\,\dot{y}\,\frac{d\dot{y}}{dt} + k\,\dot{y} + \frac{dy}{dt} = 0}$$

e integrando respecto del tiempo

$$\mathbf{\int m\,\dot{y}\,\frac{d\dot{y}}{dt}\,dt \;+\; \int k\,y + \frac{dy}{dt}\,dt \;= 0}$$

se obtiene la expresión del Principio de Conservación de la Energía, es decir:

$$\frac{1}{2}\mathbf{m}\ \dot{\mathbf{y}}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{k}\,\mathbf{y}^2 = \mathbf{E} = \mathbf{cte.}$$

donde, la Energía almacenada en el muelle producida por la deformación elástica viene representada por el término

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2}\mathbf{k}\,\mathbf{y}^2$$

y la almacenada en la masa en virtud de la velocidad

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{2}\mathbf{m}\,\dot{\mathbf{y}}^2$$

Como para sistemas conservativos la energía ha de permanecer constante:

- Cuando la velocidad del sistema es nula, la energía cinética, E_c , es nula, alcanzando la energía potencial su valor máximo, E_{pmx}

$$\mathbf{E_{Pmx}} = \mathbf{E}$$

- De una forma análoga a desplazamientos nulos la energía potencial desaparece tomando la Energía Cinética su valor máximo, E_{pmx}

$$\mathbf{E_{cmx}} = \mathbf{E}$$

Es decir, si la energía total del sistema permanece constante, entonces la Energía cinética máxima es igual a la potencial máxima.

$$\mathbf{E_{Cmx}} = \mathbf{E_{Pmx}}$$

Con lo cual se pone de manifiesto que el movimiento del sistema es un continuo intercambio de energía cinética y potencial entre la masa y el muelle.

1.2.2.– PRESENCIA DE AMORTIGUAMIENTO. DISIPACIÓN DE ENERGÍA

El proceso por el cual, la vibración disminuye en amplitud, recibe el nombre de amortiguamiento. En este proceso la energía del sistema se disipa como fricción o calor. Por lo general un sistema presenta siempre una cierta amortiguación en su movimiento que a veces es despreciable; sin embargo, en general, usualmente es inevitable su consideración. Entre los distintos tipos de amortiguamiento, cabe señalar:

1.- AMORTIGUACION FLUIDA

Puede ser viscosa o turbulenta:

- **VISCOSA:** la fuerza de amortiguación es proporcional a la velocidad
- **TURBULENTA:** la fuerza es proporcional al cuadrado de la velocidad

2.- AMORTIGUACION DE FRICCIÓN (COULOMB)

La fuerza de amortiguamiento es constante

3.- AMORTIGUACION HISTERETICA

También denominada amortiguación estructural, está producida por la fricción interna o histéresis cuando se deforma el sistema.

1.2.2.1– Amortiguamiento viscoso

Un medio fluido presenta una resistencia al movimiento de un sistema, produciéndose una disipación de energía que depende de factores tales como la forma, dimensiones y frecuencia de vibración del fluido.

Un mecanismo de amortiguación usual es el amortiguamiento viscoso, en el cual la fuerza es proporcional a la velocidad; realmente esto sólo es válido para una amortiguación como la producida por el flujo laminar de un fluido viscoso. Sin embargo, otras formas de amortiguamiento se aproximan a este último tipo si las fuerzas de disipación son pequeñas.

La utilización del amortiguamiento viscoso, tiene la ventaja de linealizar la ecuación del movimiento.

El amortiguador viscoso, se representa esquemáticamente por un pistón y la constante c, tal y como se indica en la Figura 1.12.

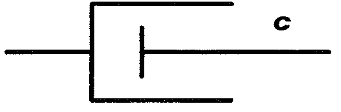


Fig. 1.12

Para el caso de vibraciones libres amortiguadas (amortiguamiento viscoso), el equilibrio del sistema (Figura 1.13) implica:

$$\mathbf{m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0} \tag{1.2-5}$$

que suele escribirse en la forma:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega\dot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{1.2-6}$$

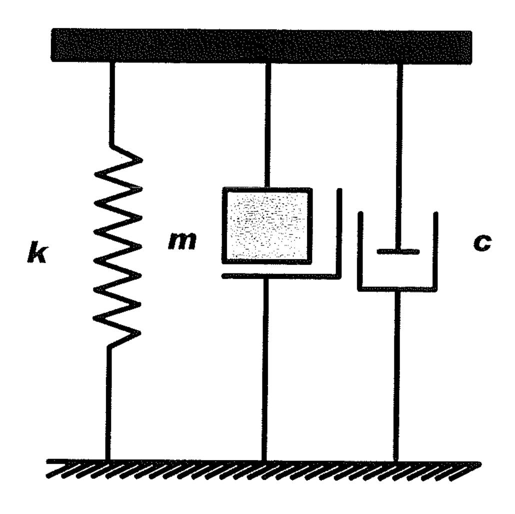


Fig.1.13

Donde se ha hecho

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{1.2-7}$$

$$\zeta = \frac{c}{\sqrt{4km}}$$

siendo: ζ el **ÍNDICE DE AMORTIGUAMIENTO**

La ecuación (1.2-6) es una ecuación diferencial ordinaria cuya solución es del tipo:

$$y(t) = Ce^{rt} \tag{1.2-8}$$

sustituyendo (1.2-8) en (1.2-6), se obtiene:

$$r^2 + 2\zeta\omega r + \omega^2 = 0 \tag{1.2-9}$$

es decir

$$r = \omega\left[-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right]$$

Debido a linealidad del problema la solución general será:

$$\mathbf{y(t)} = \mathbf{e}^{-\zeta\omega t}\left[\mathbf{A}\,\mathbf{e}^{\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega t} + \mathbf{B}\,\mathbf{e}^{-\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega t}\right] \qquad (1.2\text{-}10)$$

dependiendo las constantes A y B de las condiciones que desencadenan el movimiento. Obsérvese que el primer factor de la ecuación, $\mathbf{e}^{-\zeta\omega t}$, es modulador del segundo y disminuye con t.

La ecuación (1.2-10) adopta formas distintas según sean reales o imaginarias las raíces r_1 y r_2 de la ecuación (1.2-0); lo que se corresponde físicamente con una amortiguación grande ($\zeta > 1$), ó con una amortiguación débil ($\zeta < 1$); existiendo entre estos dos casos extremos la amortiguación crítica correspondiente a $\zeta = 1$.

- ***Sistema Sobreamortiguado ($\zeta > 1$)***

En este caso, las dos soluciones r_1 y r_2 de la ecuación (1.2-9), son reales

$$\mathbf{r}_1 = \left[-\zeta^2 + \sqrt{\zeta^2 - \mathbf{1}}\,\right]\omega$$

$$\mathbf{r}_2 = \left[-\zeta^2 - \sqrt{\zeta^2 - \mathbf{1}}\,\right]\omega$$

por lo que la ecuación (1.2-10) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{y(t)} = \mathbf{C}_1\,\mathbf{e}^{\left[-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right]\omega t} + \mathbf{C}_2\,\mathbf{e}^{\left[-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right]\omega t}$$

determinándose C_1 y C_2 a partir de las condiciones iniciales; si éstas son:

$$y(t = 0) = y_0$$

$$\dot{y}(t = 0) = \dot{y}_0$$

se obtiene:

$$\mathbf{C}_1 = -\frac{\mathbf{y}_0\,\mathbf{r}_2 - \dot{\mathbf{y}}_0}{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}$$

$$\mathbf{C}_2 = \frac{\mathbf{y}_0\,\mathbf{r}_1 - \dot{\mathbf{y}}_0}{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}$$

o bien

$$C_1 = \frac{y_0\omega\left[\zeta^2 + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right] + \dot{y}_0}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$C_2 = \frac{y_0\omega\left[-\zeta^2 + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right] - \dot{y}_0}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

Es decir, el sistema al iniciar el movimiento se verá amortiguado aproximándose exponencialmente a la posición de equilibrio, que teóricamente nunca llegará a alcanzar, no produciéndose, en este caso, oscilación alrededor de la citada posición.

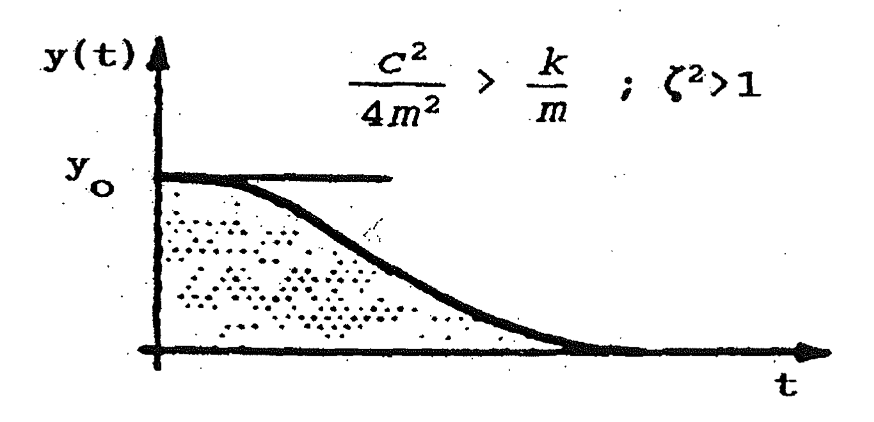


Fig.1.14(a)

- ***Sistema Críticamente amortiguado ($\zeta = 1$)***

Si $\zeta = 1$, las dos raíces de la ecuación (1.2-9) son iguales a, $-\omega$, la ecuación del movimiento será:

$$y(t) = e^{-\omega t}\left[C_1\, t + C_2\right]$$

La aplicación de las condiciones iniciales

$$y(t = 0) = y_0$$
$$\dot{y}(t = 0) = \dot{y}_0$$

proporciona, en este caso, para C_1 y C_2

$$C_1 = \dot{y}_0 + \omega y_0$$
$$C_2 = y_0$$

siendo la ecuación del movimiento

$$y(t) = e^{-\omega t}\left[y_0 + \left(\dot{y}_0 + \omega y_0\right)t\right]$$

por lo que el sistema vuelve a la posición de equilibrio sin oscilar

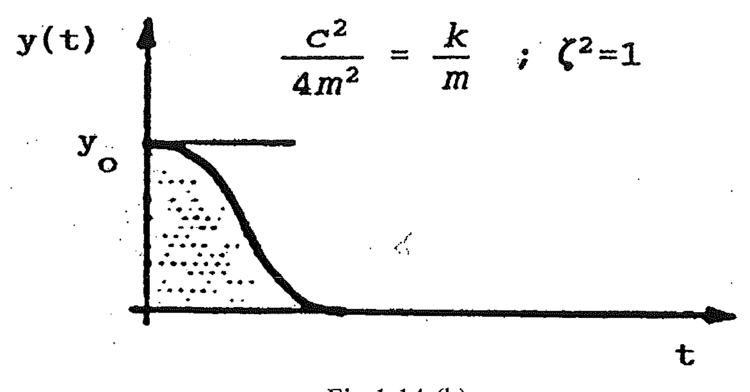


Fig.1.14.(b)

Si $\zeta = 1$, según la ecuación (1.2-7) se tendrá

$$c = \sqrt{4\,k\,m}$$

este valor de la constante de amortiguamiento, recibe el nombre de AMORTIGUAMIENTO CRITICO y depende de las características inerciales y de rigidez del sistema

$$c_{crit} = \sqrt{4\,k\,m} \qquad (1.2\text{-}11)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1.2-7), puede escribirse:

$$\varsigma = \frac{c}{c_{crit}} \qquad (1.2\text{-}12)$$

por tanto, el **Índice de Amortiguamiento** ζ es una medida adimensional del coeficiente **c** de amortiguamiento del sistema.

- ***Sistema Sub-amortiguado***

Si $\zeta < 1$, o lo que es igual

$$c < c_{crit}$$

se producen para **r** soluciones imaginarias conjugadas

$$r = \omega\left[-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\right]$$

y la solución para y(t) será:

$$\mathbf{y(t) = e^{-\zeta\omega t}\left[A e^{i\omega_d t} + B e^{-i\omega_d t}\right]} \tag{1.2-13}$$

donde ω_d es la frecuencia del sistema amortiguado

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2} \tag{1.2-14}$$

la ecuación (1.2-13) se puede escribir también, reordenando términos en la forma:

$$\mathbf{y(t) = e^{-\zeta\omega t}\left[C_1 \cos\omega_d\, t + C_2 \,\text{sen}\, \omega_d\, t\right]} \tag{1.2-15}$$

expresión que representa un movimiento vibratorio alrededor de la posición de equilibrio con una amplitud que disminuye con el tiempo y cuya frecuencia circular es ω_d , expresión (1.2-14).

En este caso, el desplazamiento en el instante inicial, y(0), se ve modulado por una exponencial decreciente. Mientras que la cantidad entre corchetes se repite a intervalos:

$$\mathbf{T_D = \frac{2\pi}{\omega_d}}$$

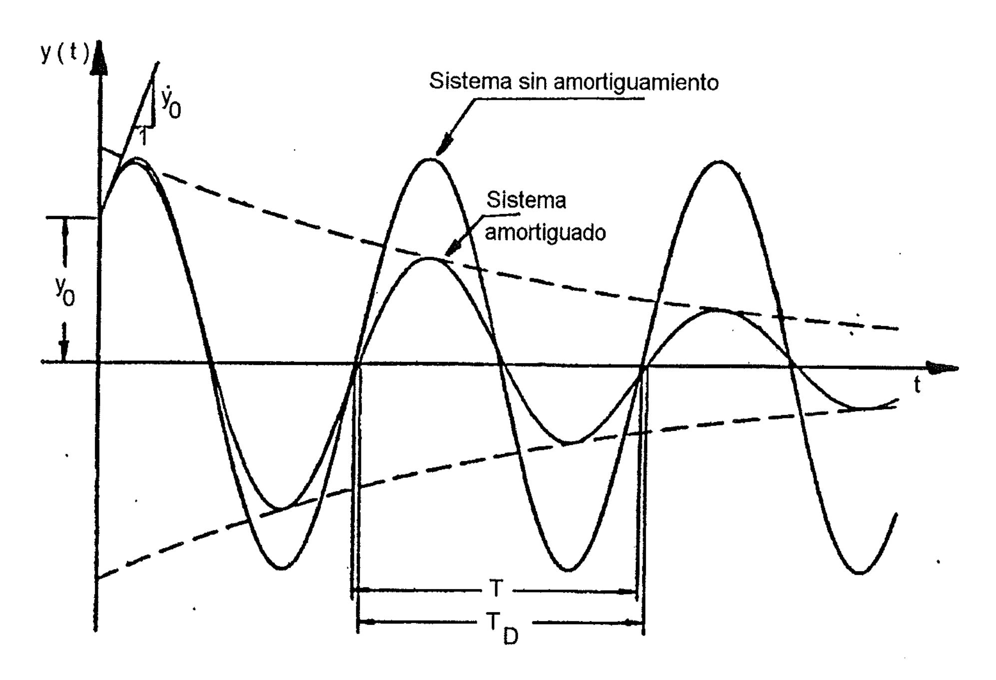


Fig. 1.14(c)

De la ecuación (1.2-14) se deduce que la presencia del amortiguamiento en el sistema, disminuye su frecuencia natural de vibración, aumentando por tanto su período. Una representación de la citada ecuación, es la indicada en la Figura 1.15, donde puede observarse que para valores pequeños de amortiguamiento, la diferencia entre ω_d y ω es despreciable a efectos prácticos.

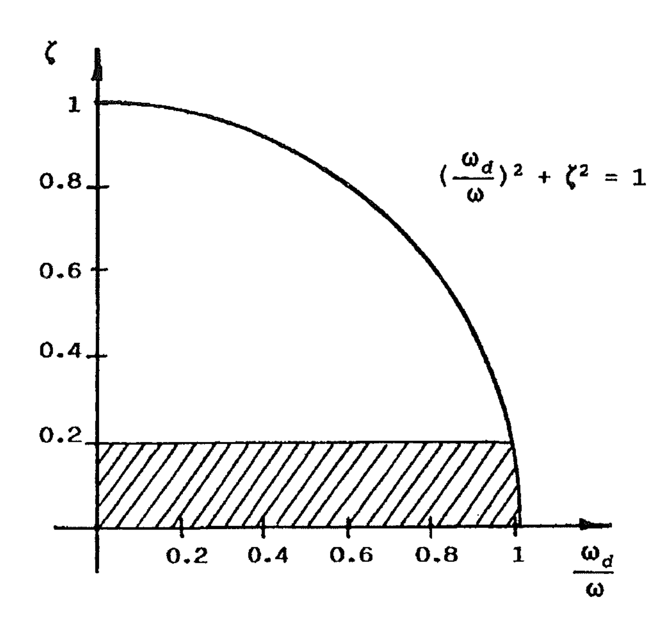


Fig. 1.15

En la Tabla 1.2.1 se indican algunos valores característicos del Índice de Amortiguamiento:

	ζ (%)
Automóviles (absorción en el choque)	10-50
Suelo	5
Goma, Caucho	4
Vigas de hormigón	4
Vigas de hormigón pretensado	1,5
Estructuras de acero remachadas	1,5
Estructuras de acero soldadas	0,5
Paredes de ladrillo	0,8

Tabla 1.2.1

1.2.2.2– Decremento logarítmico

Una cantidad de interés, indicativa del grado de modulación introducido por el amortiguamiento en los desplazamientos del sistema se obtiene al comparar dos elongaciones y(t) e $y(t+T_D)$, separadas por el período T_D.

Según (1.2-15):

$$\frac{y(t)}{y(t+T_D)} = e^{\zeta\omega T_D} \qquad (1.2\text{-}16)$$

y

$$\delta = \ln \frac{y(t)}{y(t+T_D)} = \zeta\,\omega\,T_D \qquad (1.2\text{-}17)$$

la expresión (1.2-17) define el denominado DECREMENTO LOGARÍTMICO δ; pudiendo escribirse, teniendo en cuenta (1.2-15) y (1.2-14), en la forma

$$\delta = 2\,\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (1.2\text{-}18)$$

siendo, por tanto, δ una medida del *"grado de decrecimiento de la oscilación"*.

El mismo razonamiento puede utilizarse para j períodos; en efecto, si se designa por y_i, y_{i+j} las amplitudes en los instantes t_i y $t_i + j\,T_D$, respectivamente se obtendría:

$$\frac{y_i}{y_{i+j}} = \frac{y(t_i)}{y(t_i + jT_D)} = \frac{e^{-\zeta\omega t}}{e^{-\zeta\omega(t+jT_D)}} = e^{\zeta\omega j T_D} \qquad (1.2\text{-}19)$$

tomando logaritmos en (1.2-19) y teniendo en cuenta (1.2-17) puede escribirse:

$$\ln \frac{y_i}{y_{i+j}} = \zeta\,\omega\,j\,T_D = j\,\delta \qquad (1.2\text{-}20)$$

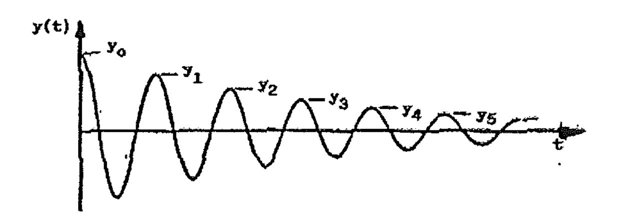
La expresión anterior, junto con (1.2-18), proporciona:

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \frac{y_i}{y_{i+j}} = 2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (1.2\text{-}21)$$

resultado que puede utilizarse para evaluar experimentalmente el amortiguamiento de un sistema, en la forma siguiente:

1.- *El sistema inicialmente en su posición de equilibrio es perturbado a una posición y_0.*

2.- *Se registra la vibración producida en el sistema.*



3.- *Se mide el tiempo utilizado para completar un ciclo; es decir, se determina el período T_D.*

4.- *Se mide y_i , y_{i+j}.*

5.- *Se calcula*

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \frac{y_i}{y_{i+j}}$$

6.- *Se calcula ζ*

Aunque el procedimiento es aplicable con j = 1, puede proporcionar resultados incorrectos para sistemas con un amortiguamiento pequeño.

Por último, cabe indicar que como en las estructuras habituales el valor de ζ es relativamente pequeño, está en general justificado simplificar la expresión del decremento logarítmico, tomando como definición para el mismo: $\delta = 2\pi\zeta$

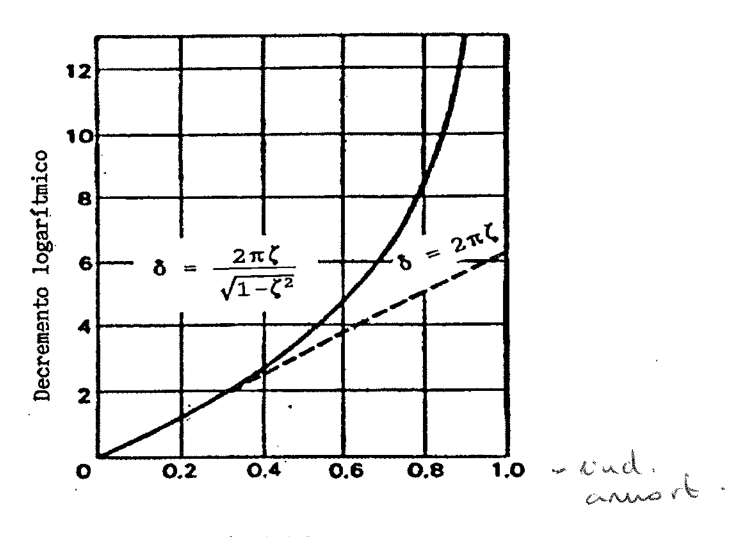


Fig.1.16

1.2.2.3– Consideraciones energéticas

Con objeto de analizar los efectos del amortiguamiento desde otro punto de vista, es interesante reconsiderar la ecuación

$$\mathbf{m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0}$$

multiplicando por $\dot{y}$ e integrando respecto al tiempo

$$\int_0^T m\,\ddot{y}\,\dot{y}\,dt + \int_0^T c\,k\,\dot{y}\,dt = -\int_0^T c\,\dot{y}^2 dt \qquad (1.2\text{-}22)$$

se obtiene la Energía Disipada por ciclo, E_d, donde

$$E_d = \int_0^T c\,\dot{y}^2 dt \qquad (1.2\text{-}23)$$

como **c** e $\dot{y}^2$ son esencialmente cantidades positivas, el **signo** – indica que E_d es la Energía disipada; existiendo, por tanto, una continua pérdida de energía durante el movimiento.

En el caso de amortiguamiento viscoso y suponiendo un movimiento armónico del tipo*

$$y(t) = A\,\mathrm{sen}\,\alpha t \qquad (1.2\text{-}24)$$

la Energía Disipada, E_d, en un ciclo completo será:

$$E_d = \int_0^T c\,\dot{y}^2 dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} c\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dt = \pi\,c\alpha\,A^2 \qquad (1.2\text{-}25)$$

y sí el sistema vibra a su frecuencia natural, $\alpha = \omega$ entonces

$$E_d = \pi(2\,\pi\,\zeta\,\omega\,m)\,\omega\,A^2 = 2\,\pi\,\zeta\,k\,A^2 \qquad (1.2.25a)$$

* *En el apartado (1.3.2), se verá que un movimiento de estas características, corresponde a la respuesta de un sistema amortiguado sometido a una fuerza de excitación armónica de frecuencia α*

Es decir, la Energía Disipada es proporcional al cuadrado de la amplitud, A, del movimiento; conviene observar que la citada energía depende de la frecuencia, no siendo constante para valores fijos de la amplitud y del amortiguamiento.

Por otra parte, al ser la Fuerza de disipación:

$$F_d = c\,\dot{y} = c\,A\,\alpha\;\cos\alpha t \qquad (1.2\text{-}26)$$

y teniendo en cuenta (1.2-24); la relación entre F_d e y, es una elipse de ecuación

$$(\frac{y}{A})^2 + (\frac{F_2}{c\,\alpha\,A})^2 = 1 \qquad (1.2\text{-}27)$$

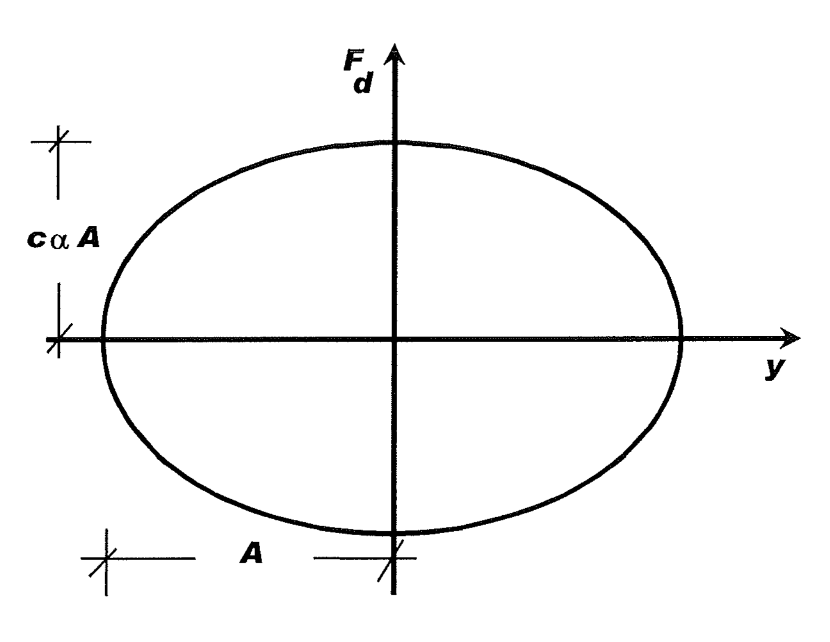


Fig.1.17

cuya área representa la Energía Disipada por ciclo.

La relación entre la energía disipada en cada ciclo del movimiento y la energía total del sistema se la define como CAPACIDAD ESPECÍFICA DE AMORTIGUAMIENTO, ψ

$$\psi = \frac{E_d}{E}$$

Por otra parte, como la energía total del sistema, E, puede expresarse mediante la energía potencial máxima, o bien como la energía cinética máxima, resultará.

$$E = E_{cmx} = \frac{1}{2}\,m\,\alpha^2 A^2$$

obteniéndose para ψ

$$\psi = \frac{E_d}{E} = \frac{2\pi c}{m\alpha}$$

y como

$$\frac{c}{m} = 2\zeta\omega$$

siendo

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

por lo que, para α igual a la frecuencia natural ω del sistema

$$\psi = \frac{E_d}{E} = 4\pi\zeta$$

Finalmente, teniendo en cuenta la definición de Decremento logarítmico, la capacidad de amortiguamiento para índices de amortiguamiento bajos será

$$\psi = \frac{E_d}{E} \approx 4\pi\zeta \approx 2\delta \qquad (1.2\text{-}28)$$

lo que sugiere un procedimiento para calcular ζ.

La energía disipada por ciclo proporcionado por la ecuación (1.2-25), también es válida cuando se considera al amortiguador viscoso dispuesto en paralelo con un muelle de constante k; en efecto, la fuerza necesaria para provocar el movimiento será.

$$F = k\,y + c\,\dot{y} \qquad (1.2\text{-}29)$$

y para un movimiento armónico de amplitud A y frecuencia α

$$y(t) = A \operatorname{sen} \alpha t \qquad (1.2\text{-}30)$$

se obtendrá al sustituir en (1.2-29)

$$F - ky = cA\alpha \cos \alpha t \qquad (1.2\text{-}31)$$

o bien

$$\frac{F - ky}{cA\alpha} = \cos \alpha t \qquad (1.2\text{-}32)$$

y teniendo en cuenta

$$\frac{y}{A} = \operatorname{sen} \alpha t \qquad (1.2\text{-}33)$$

la suma de los cuadrados de (1.2-32) y (1.2-33) permite escribir

$$\left[\frac{F-ky}{cA\alpha}\right]^2+\left[\frac{y}{A}\right]^2=1 \qquad (1.2\text{-}34)$$

que es la ecuación de la elipse representada en la Figura 1.18 y que encierra un área πcA^2 igual a la Energía Disipada, E_d.

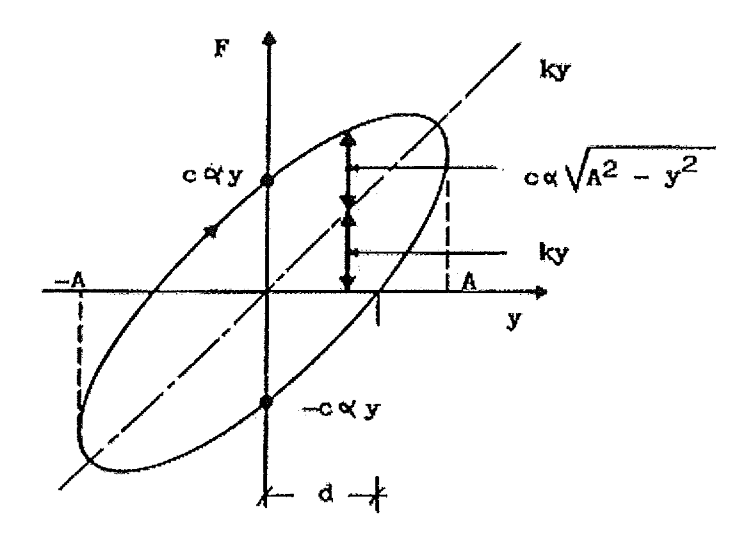


Fig.1.18

La Energía disipada en el ciclo completo será

$$E_d=\int_0^T F\,\dot{y}\,dt=\int_0^T (ky+cy)\,\dot{y}\,dt$$

y como ky es perpendicular a $\dot{y}$ no producirá trabajo, por lo que

$$E_d=\int_0^T c\,\dot{y}^2 dt=\pi\,\alpha\,c\,A^2$$

Así pues, medir el área encerrada por la elipse es equivalente a calcular la energía disipada.

La tangente a la elipse en el punto P(F = ky; y = A) es vertical, lo que sugiere una construcción gráfica sencilla para medir experimentalmente el valor de k y obtener ξ; para ello obsérvese que (1.2-34) también puede escribirse en la forma

$$F=k\,y\pm c\,\alpha\sqrt{A^2-y^2} \qquad (1.2\text{-}35)$$

y para F = 0, se tiene que y = d

$$-\mathbf{k\,d} = \pm\,\mathbf{c}\,\alpha\sqrt{\mathbf{A}^2 - \mathbf{d}^2}$$
$$\mathbf{k}^2\,\mathbf{d}^2 = \mathbf{c}^2\,\alpha(\mathbf{A}^2 - \mathbf{d}^2)$$
$$(\mathbf{k}^2 + \mathbf{c}^2 + \alpha^2)\,\mathbf{d}^2 = \mathbf{c}^2\,\mathbf{a}^2\,\mathbf{A}^2$$

es decir

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{c}\,\alpha}{\mathbf{k}\sqrt{1 + (\frac{\mathbf{c}\,\alpha}{\mathbf{k}})^2}} \tag{1.2-36}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\mathbf{c}\,\omega}{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{c}\,\omega}{\mathbf{m}\,\omega^2} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{m}\,\omega} = \frac{2\zeta\,\omega}{\omega} = 2\zeta \tag{1.2-37}$$

la expresión (1.2-36) puede escribirse, para α igual a la frecuencia natural:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{A}} = \frac{2\zeta}{\sqrt{1 + 4\zeta^2}} \tag{1.2-38}$$

y para valores de ξ pequeños

$$\mathbf{d} = 2\zeta\ \mathbf{A} \tag{1.2-39}$$

expresión que sugiere de nuevo la posibilidad de medir ξ por inspección de la curva de histéresis.

En lo que se refiere a la medida de la constante k, esta puede obtenerse teniendo en cuenta que derivando (1.2-34), respecto a y

$$\frac{\mathbf{F} - \mathbf{k\,y}}{(\mathbf{c}\,\alpha)^2}\left[\frac{\mathbf{dF}}{\mathbf{dy}} - \mathbf{k}\right] + \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

el máximo se obtendrá imponiendo la condición

$$\frac{\mathbf{dF}}{\mathbf{dy}} = \mathbf{0}$$

es decir

$$\mathbf{k(F - ky)} = \mathbf{c}^2\,\alpha^2 + \mathbf{y}$$

por lo que

$$k\,F = y\,(c^2\,\alpha^2 + k^2)$$

y la pendiente secante, m_S

$$m_1 = \frac{f}{y} = \frac{k^2 + c^2\,\alpha^2}{k} = k\left[1 + \frac{c^2\,\alpha^2}{k^2}\right] \qquad (1.2\text{-}40)$$

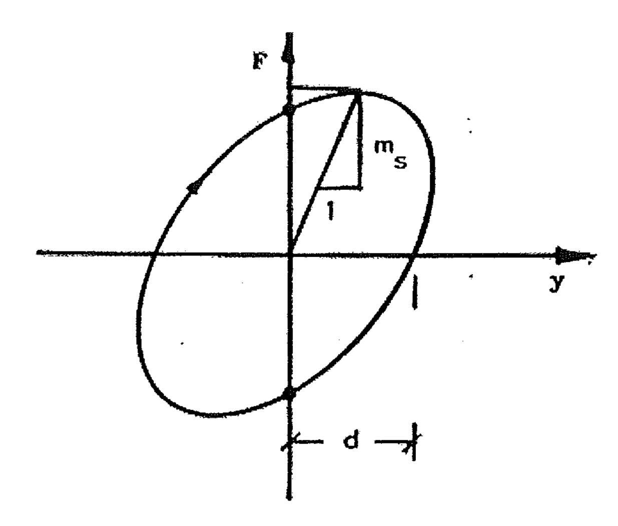


Fig.1.19

Recordando que para la frecuencia natural, (1.2-37) proporcionaba:

$$\frac{c\,\omega}{k} = 2\,\zeta$$

m_s puede escribirse

$$m_S = k\,(1 + 4\,\zeta^2) \qquad (1.2\text{-}41)$$

En resumen, conociendo m_s y d pueden obtenerse ζ y k mediante las expresiones (1.2-39) y (1.2-41).

1.2.2.4– Amortiguamiento histerético

La observación de la ecuación (1.2-25), permite concluir que la energía disipada por ciclo es independiente de la frecuencia o disminuye muy suavemente con ella. En la Figura 1.20, se indica la variación de la Energía disipada con la frecuencia.

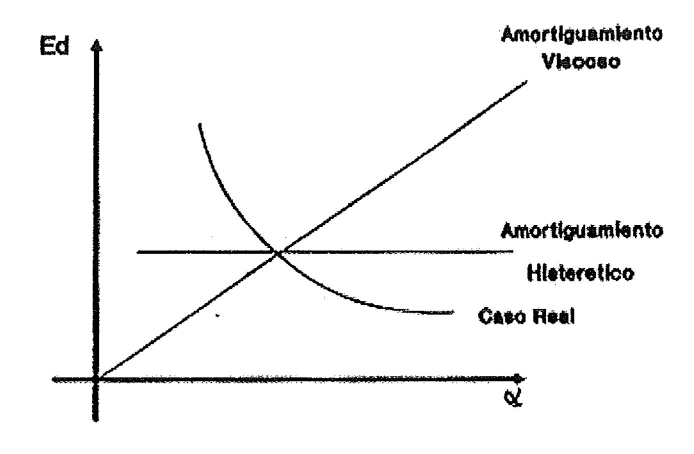


Fig.1.20

La experimentación indica una tendencia contraria a la aceptada en el planteamiento realizado para el amortiguamiento viscoso, razón por la que se acostumbra a suponer que "la energía perdida es independiente de la frecuencia", lo que implica que la Fuerza de disipación debida al amortiguamiento es proporcional a la velocidad e inversamente proporcional a la frecuencia.

El modelo de amortiguamiento en este caso es designado como "*interno, estructural o de histéresis*", ya que puede relacionarse con el ciclo de histéresis que presenta el diagrama tensión-deformación de un sistema con amortiguamiento que oscila alrededor de su posición de equilibrio estático, Figura 1.21, y para el que el área encerrada por el bucle de histéresis representa la energía disipada en un ciclo de vibración.

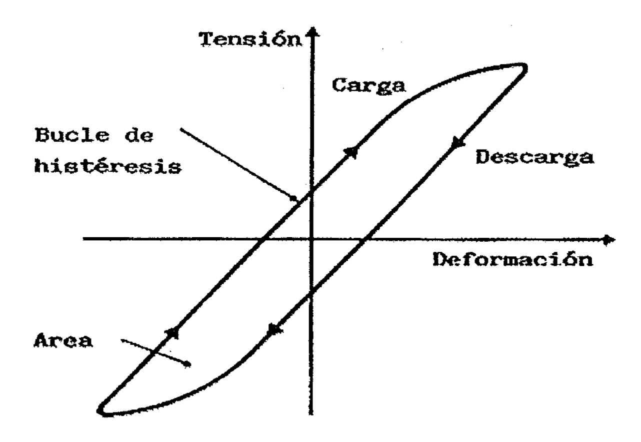


Fig.1.21

Para ello, el producto $c\alpha$ se sustituye por una constante h, denominada CONSTANTE DE AMORTIGUAMIENTO HISTERÉTICO:

$$\mathbf{h = c\,\alpha = cte.} \qquad (1.2\text{-}42)$$

y como para la frecuencia natural del sistema

$$\mathbf{c = 2\zeta\,\omega\;m}$$

la ecuación (1.2-42) puede escribirse

$$\mathbf{h = 2\,\zeta\,\omega^2 m = 2\zeta\frac{k}{m}\,m}$$

por tanto

$$\mathbf{h = 2\,\zeta\,k} \qquad (1.2\text{-}43)$$

y la energía Disipada, E_d, ecuación (1.2-25)

$$\mathbf{E_d = \pi\,h\,A^2} \qquad (1.2\text{-}44)$$

es función únicamente de la constante, h y de la amplitud del movimiento, A; siendo directamente proporcional al cuadrado de esta última, lo que implica claramente la consideración de un problema no lineal.

Recordando que para valores de ζ pequeños, (1.2-39), proporcionaba

$$\mathbf{d = 2\zeta\,A}$$

y teniendo en cuenta (1.2-43), se obtiene

$$\mathbf{\frac{d}{A} = \frac{h}{k}} \qquad (1.2\text{-}45)$$

expresión que permite la identificación de h.

En la hipótesis de movimiento armónico, el grado de modulación por ciclo introducido, por la consideración de amortiguamiento histerético, puede obtenerse mediante el balance de energía entre dos puntos, P y R, separados medio ciclo.

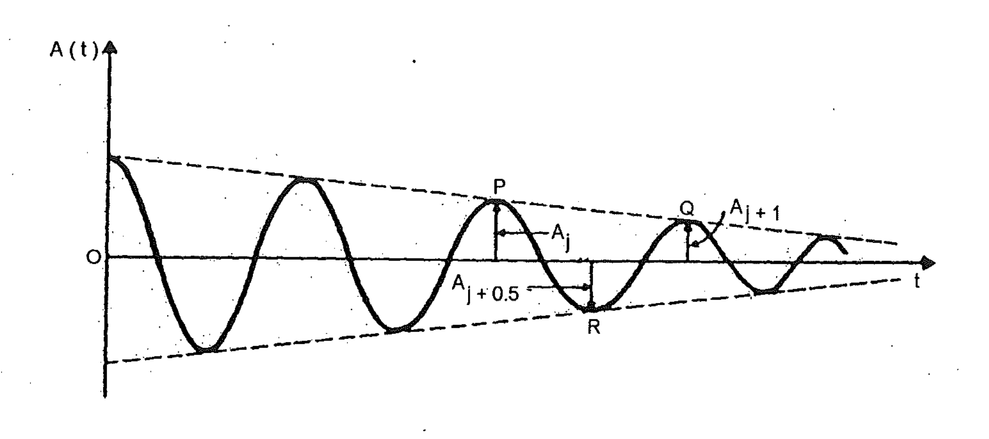


Fig.1.22

$$\frac{1}{2}k\,A_j^2 - \frac{\pi\,hA_j^2}{4} - \frac{\pi\,hA_{j+0,5}^2}{4} = \frac{\pi\,hA_{j+0,5}^2}{2}$$

obteniéndose

$$\frac{A_j}{A_{j+0,5}} = \sqrt{\frac{2k+\pi h}{2k-\pi h}}$$

de forma análoga, el balance de energía entre Q y R proporciona

$$\frac{A_{j+0,5}}{A_{j+1}} = \sqrt{\frac{2k+\pi h}{2k-\pi h}}$$

por lo que

$$\frac{A_j}{A_{j+1}} = \frac{2k+\pi h}{2k-\pi h} = \frac{2k+\pi h+2\pi h}{2k-\pi h} = 1+\frac{\pi h}{k-\frac{\pi h}{2}}$$

definiéndose el decremento logarítmico correspondiente a un amortiguamiento histerético como:

$$\delta_H = \ln\left[\frac{A_j}{A_{j+1}}\right] = \ln\left[1+\frac{\pi\,h}{k-\frac{\pi\,h}{2}}\right] \approx \frac{\pi\,h}{k} \qquad (1.2\text{-}46)$$

y el Índice de Amortiguamiento equivalente a un amortiguamiento viscoso ζ se obtendrá teniendo en cuenta (1.2.21)

$$\delta_H = 2\pi\zeta \approx \frac{\pi h}{k}$$

es decir

$$\zeta_{eq} = \frac{h}{2k}$$

Normalmente no es posible separar la rigidez de una estructura de su amortiguamiento histerético, motivo por el cual en el modelo matemático que se utiliza para caracterizar el comportamiento del sistema, las dos características: rigidez y amortiguamiento reciben un tratamiento conjunto mediante lo que se denomina RIGIDEZ COMPLEJA.

En el caso más general un movimiento armónico es del tipo

$$y = A\, e^{iwt} \qquad (1.2\text{-}47)$$

lo que permite trabajar simultáneamente con la proyección horizontal y vertical del mismo.

Teniendo en cuenta (1.2-47), la fuerza F vendrá dada por la expresión:

$$\begin{aligned} F &= k\, y + c\, \dot{y} \\ F &= k\, A e^{i\omega t} + i\, A\, \omega\, e^{i\omega t} \\ F &= (k + i\, \omega\, c)\, A e^{i\omega t} \end{aligned} \qquad (1.2\text{-}48)$$

o lo que es igual

$$F = (k + i\, \omega\, c)\, y \qquad (1.2\text{-}49)$$

o bien

$$F = k^*\, y$$

donde

$$k^* = k + i\omega\, c \qquad (1.2\text{-}50)$$

y como $h = \omega\, c$, resulta

$$k^* = k + i\, h = k\left[1 + i\frac{h}{k}\right]$$

donde la parte real de k* representa la rigidez y la parte imaginaria el amortiguamiento.

1.2.2.5.- Amortiguamiento de Coulomb

Otro modelo de disipación de energía, corresponde a la amortiguación por fricción o amortiguamiento de Coulomb.

En este caso la fuerza de amortiguamiento es constante en magnitud, y por tanto independiente de la amplitud y frecuencia, pero de sentido contrario a la dirección de la velocidad, por lo que el sentido de la fuerza cambiará cuando cambie la dirección del movimiento; motivo por el que es necesario plantear dos ecuaciones que caractericen el movimiento del sistema en cada una de las dos situaciones planteadas en la Figura 1.23.

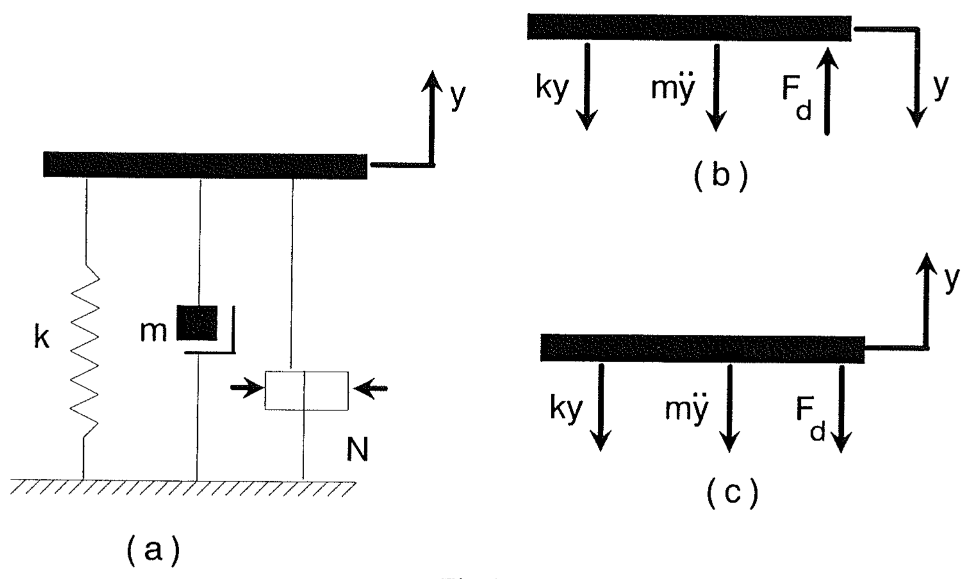


Fig.1.23

Siendo

$$\mathbf{F_d} = -\frac{\dot{y}}{|\dot{y}|}\mathbf{N tag\phi} \qquad (1.2\text{-}51)$$

donde ϕ es el *ángulo de fricción* y N la fuerza normal. Valores típicos de ϕ , se indican en la Tabla 1.2.2

Material	ϕ
Madera sobre madera	20°
Acero sobre acero	10°
Arena y Grava	30°
Arcilla	20°

Para el primer caso, Figura 1.23(b), la 2ª Ley de Newton permite escribir

$$m\ddot{y} + k\,y - N\,tag\,\phi = 0 \;\; ; \;\; si \;\; \ddot{y} < 0 \qquad (1.2\text{-}52)$$

cuya solución es

$$y = A_1 \cos\omega t + B_1 \,sen\,\omega t + \frac{N\,tag\,\phi}{k} \qquad (1.2\text{-}53)$$

y para el segundo, Figura 1.23.(a)

$$m\ddot{y} + k\,y + N\,tag\,\phi = 0 \;\; ; \;\; si \;\; \dot{y} > 0 \qquad (1.2\text{-}54)$$

cuya solución es

$$y = A_2 \cos\omega t + B_2 \,sen\,\omega t - \frac{N\,tag\phi}{k} \qquad (1.2\text{-}55)$$

donde las constantes A_1, B_1, A_2 y B_2 dependen de las condiciones iniciales en cada semiciclo sucesivo.

Para el caso en el que las condiciones iniciales sean

$$y(t=0) = y_0$$
$$\dot{y}(t=0) = 0$$

se tendría

$$y_0 = A_1 + \frac{N\,tag\,\phi}{k}$$
$$0 = B_1\,\omega$$

o lo que es igual

$$A_1 = y_0 - \frac{N\,tag\,\phi}{k}$$
$$B_1 = 0$$

por lo que la ecuación del movimiento toma la forma

$$y = (y_0 - \frac{N\,tag\,\phi}{k}) \cos\omega t + \frac{N\,tag\,\phi}{k} \qquad (1.2\text{-}56)$$

solución válida para $0 \le \omega t \le \pi$; cuando $\omega t = \pi$

$$y(t = \frac{\pi}{\omega}) = -(y_0 - \frac{2\,N\,tag\,\phi}{k}) \qquad (1.2\text{-}57)$$

$$\dot{y}\,(t = \frac{\pi}{\omega}) = 0$$

es decir, la amplitud inicial, y_0 , se ha reducido en una cantidad igual al doble del desplazamiento característico $\frac{N\,tag\,\phi}{k}$

Las condiciones (1.2-57), son las iniciales para la siguiente mitad del ciclo, por lo que

$$y\,(t = \frac{\pi}{\omega}) = -(y_0 - \frac{2\,N\,tag\,\phi}{k}) = -A_2 - \frac{N\,tag\,\phi}{k}$$

$$\dot{y}\,(t = \frac{\pi}{\omega}) = 0 = B_2\,\omega$$

lo que implica

$$A_2 = y_0 - \frac{3\,N\,tag\,\phi}{k}$$

$$B_2 = 0$$

siendo entonces la ecuación del movimiento, para $\pi \leq \omega t \leq 2\,\pi$

$$y = (y_0 - \frac{3\,N\,tag\,\phi}{k})\cos\omega\,t - \frac{N\,tag\,\phi}{k}$$

y al final del semiciclo, $\omega t = 2\,\pi$

$$y(t = \frac{2\pi}{\omega}) = y_0 - \frac{4\,N\,tag\,\phi}{k}$$

$$\dot{y}\,(t = \frac{2\pi}{\omega}) = 0 \qquad (1.2\text{-}58)$$

que representan las condiciones iniciales para el siguiente semiciclo.

En la Figura 1.24 puede observarse que, en cada semiciclo, se reduce la amplitud en un factor $\frac{2\,N\,tag\,\phi}{k}$ por lo que para un número de semiciclos, **r** , la amplitud del movimiento será

$$y_0 - r\,\frac{2\,N\,tag\,\phi}{k}$$

cesando el movimiento del sistema al final del semiciclo para el cual la amplitud es menor que el desplazamiento característico, es decir

$$y_0 - r\,\frac{2\,N\,tag\,\phi}{k} \le \frac{N\,tag\,\phi}{k}$$

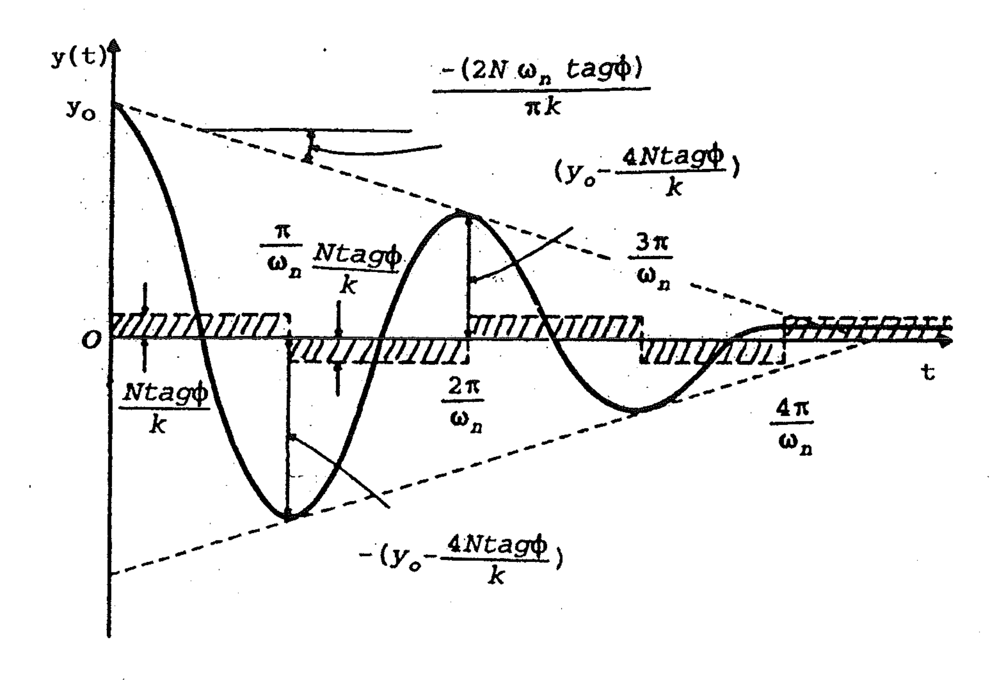


Fig.1.24

o lo que es igual

$$r \ge y_0\,\frac{\frac{2\,N\,tag\,\phi}{k}}{\frac{2\,N\,tag\,\phi}{k}} \qquad (1.2\text{-}59)$$

Como en cada ciclo se reduce la amplitud en un valor igual a

$$\frac{4\,N\,tag\,\phi}{k}$$

el decremento será lineal

$$y\,(t+T) = y\,(t) - \frac{4\,N\,tag\,\phi}{k} \qquad (1.2\text{-}60)$$

siendo entonces la pendiente de la recta moduladora

$$\frac{\frac{-4\,N\,\mathbf{tag}\,\phi}{k}}{\frac{2\,\pi}{\omega}} = -\frac{2\,N\omega\;\mathbf{tag}\,\phi}{\pi\,k} \qquad (1.2\text{-}61)$$

El resultado anterior puede utilizarse para definir un amortiguamiento viscoso equivalente. De hecho la ecuación (1.2-16) puede escribirse

$$\frac{y(t+T_D)}{y(t)} = e^{-\zeta\omega T_D} = 1 - \zeta\omega T_D + \frac{(\zeta\omega T_d)^2}{2!} + \ldots$$

y como T_D , para índices de amortiguamiento bajo es igual a $2\pi/\omega$ resulta

$$y(t+T_D) = y(t) - 2\,\pi\,\zeta\,y\,(t) + \ldots \qquad (1.2\text{-}62)$$

comparando (1.2-60) y (1.2-62), y haciendo **y(t)** = **A**; se obtiene

$$2\pi\zeta_{eq}\,A = 4\,\frac{N\,\mathbf{tag}\,\phi}{k}$$

es decir

$$\zeta_{eq} = \frac{2}{\pi}\frac{\frac{4\,N\,\mathbf{tag}\,\phi}{k}}{A} \qquad (1.2\text{-}63)$$

donde **A** es la amplitud del movimiento

Por otra parte, según (1.2-25a), la energía disipada es

$$E_d = 2\,\pi\,A^2\,k\,\zeta_{eq} = 4\,A\,(N\,\mathbf{tag}\,\phi) \qquad (1.2\text{-}64)$$

lo que puede interpretarse como el cuádruplo del trabajo realizado por la fuerza, **N tag** ϕ, en un cuarto de período.

1.3.- VIBRACIONES FORZADAS

Normalmente, la vibración de un sistema se produce como consecuencia de la aplicación sobre el mismo de fuerzas que varían con el tiempo. La respuesta del sistema bajo este tipo de excitación se denomina vibración forzada, y corresponde a la solución de la ecuación

$$\mathbf{m\,\ddot{y}(t) + c\,\dot{y}\,(t) + k\,y\,(t) = F(t)} \qquad (1.3\text{-}1)$$

Como es habitual, la solución a la ecuación diferencial anterior, se obtendrá en la forma

$$\mathbf{y(t) = y_0(t) + y_p(t)} \qquad (1.3\text{-}2)$$

donde, $y_0(t)$, es la solución de la ecuación diferencial homogénea, véase (1.2-15),

$$\mathbf{y_0(t) = e^{-\zeta\omega t}\left[C_1 \cos \omega_d t + C_2 \,\text{sen}\, \omega_d t\right]}$$

e, $y_p\,(t)$, la solución particular que dependerá de la expresión de F(t).

1.3.1. CARGA CONSTANTE

El caso más sencillo se produce cuando

$$\mathbf{F(t) = P = cte}$$

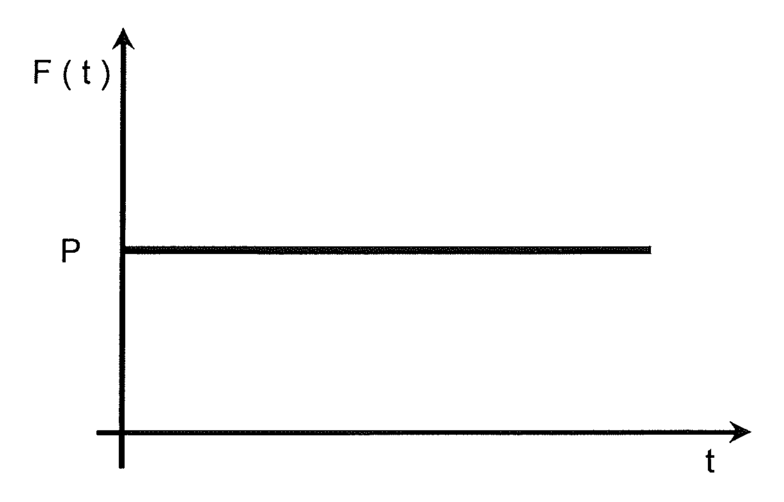


Fig.1.25

Por lo que en este caso

$$y_p(t) = \frac{P}{k}$$

y por tanto

$$y_0(t) = \frac{P}{k} + e^{-\zeta\omega t}\left[C_1 \cos \omega_d t + C_2 \text{ sen } \omega_d t\right] \qquad (1.3\text{-}3)$$

si se consideran como condiciones iniciales

$$y(t) = 0$$
$$\dot{y}(t) = 0$$

entonces

$$C_1 = -\frac{P}{k}$$
$$C_2 = -\frac{P}{k}\frac{\zeta\omega}{\omega_d}$$

tomando, en este caso, la ecuación (1.3-3) la forma

$$y(t) = \frac{P}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega t}(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen } \omega_d \ t)\right] \qquad (1.3\text{-}4)$$

y para el caso en el que $\zeta = 0$, se obtiene

$$y(t) = \frac{P}{k}\left[1 - \cos \omega t\right] \qquad (1.3\text{-}5)$$

Al cociente **P/k**, se le designa por el término *FLECHA ESTÁTICA,* y representa el desplazamiento que se produciría en el sistema al aplicar la carga P estáticamente

$$\delta_{st} = \frac{P}{k} \qquad (1.3\text{-}6)$$

La representación gráfica de (1.3-5) se indica en la figura (1.26), y en ella puede observarse que la amplitud del desplazamiento, y_{mx}, es

$$y_{mx} = 2\frac{P}{k} = 2\,\delta_{st}$$

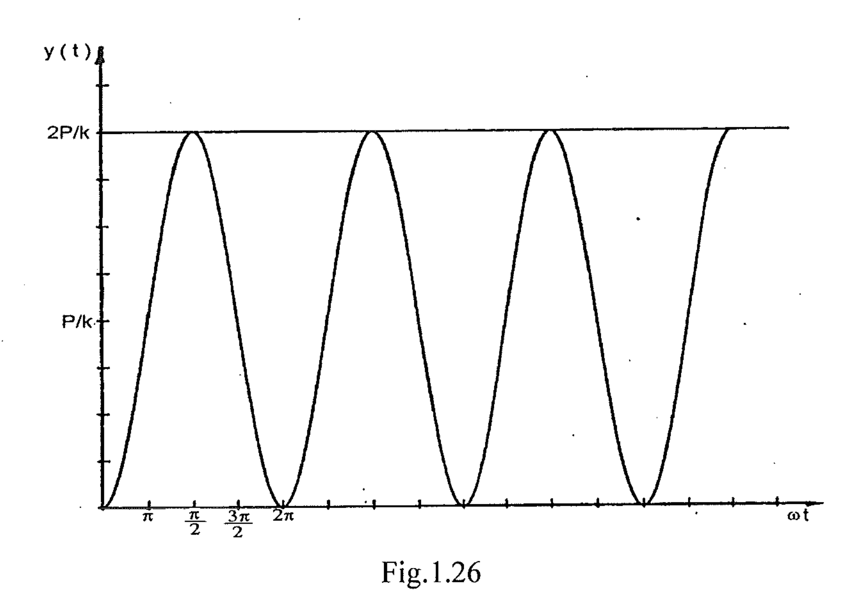


Fig.1.26

1.3.2.- RESPUESTA A CARGAS ARMONICAS

Debido a que es posible expresar cualquier función periódica como suma de funciones armónicas; es importante considerar la respuesta de un sistema sometido a una solicitación de estas características.

En este caso

$$F(t) = P_0 \cos \omega_0 t \qquad (1.3\text{-}7)$$

y la solución particular, y_p (t) será

$$y_p = A \cos \omega_0 t + B \operatorname{sen} \omega_0 t \qquad (1.3\text{-}8)$$

que sustituida en (1.3-1), y de acuerdo con (1.3-7) proporciona para A y B los siguientes valores

$$A = \frac{P_0}{k} \frac{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \frac{P_0}{k} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}$$

(1.3-9)

$$B = \frac{P_0}{k} \frac{2\zeta \frac{\omega_0}{\omega}}{(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \frac{P_0}{k} \frac{2\zeta\beta}{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}$$

Por otra parte, si se hace

$$\begin{array}{lcl} A = Y_0 \cos \phi_0 & & \operatorname{tag} \phi_0 = \dfrac{B}{A} \\ & \Rightarrow & \\ B = Y_0 \operatorname{sen} \phi_0 & & Y_0 = \sqrt{A^2 + B^2} \end{array} \qquad (1.3\text{-}10)$$

la ecuación (1.3-8) puede escribirse en la forma

$$y_p(t) = Y_0 \cos(\omega_0 t - \phi_0) \qquad (1.3\text{-}11)$$

Donde

$$\operatorname{tag} \phi_0 = \frac{2\zeta \dfrac{\omega_0}{\omega}}{1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}} \qquad (1.3\text{-}12)$$

$$Y_0 = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + 4\zeta^2 \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \qquad (1.3\text{-}13)$$

siendo, δ_{st}, la FLECHA ESTATICA, igual a P/k.

En resumen, la respuesta y(t) del sistema, se compone de dos términos que corresponden a:

- la solución homogénea que, como se vio en el apartado (1.2.2.1), tiende a cero si $t \to \infty$, por lo que $y_h(t)$ representa ***la componente transitoria del movimiento***.
- La solución particular, con una amplitud Y_o y un ángulo de fase ϕ_0, es la ***componente permanente del movimiento***; esta solución no está modulada por ninguna función exponencial, de manera que el movimiento perdura en el tiempo.

Al cociente $\dfrac{Y_0}{\delta_{st}}$ se le denomina ***FACTOR DE AMPLIFICACION DINÁMICO***

$$D = \frac{Y_0}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + 4\zeta^2 \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \qquad (1.3\text{-}14)$$

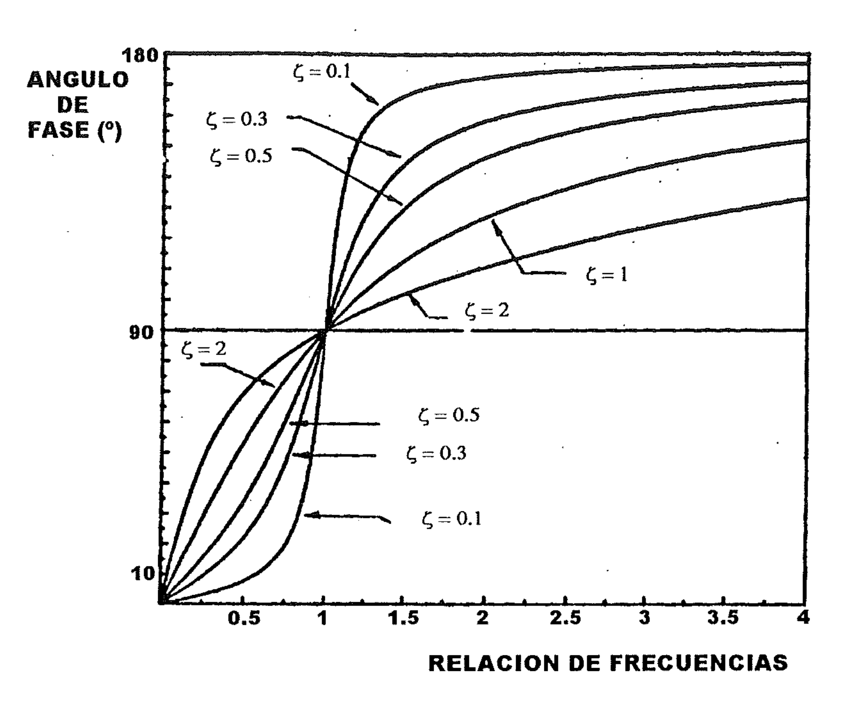


Fig.1.27

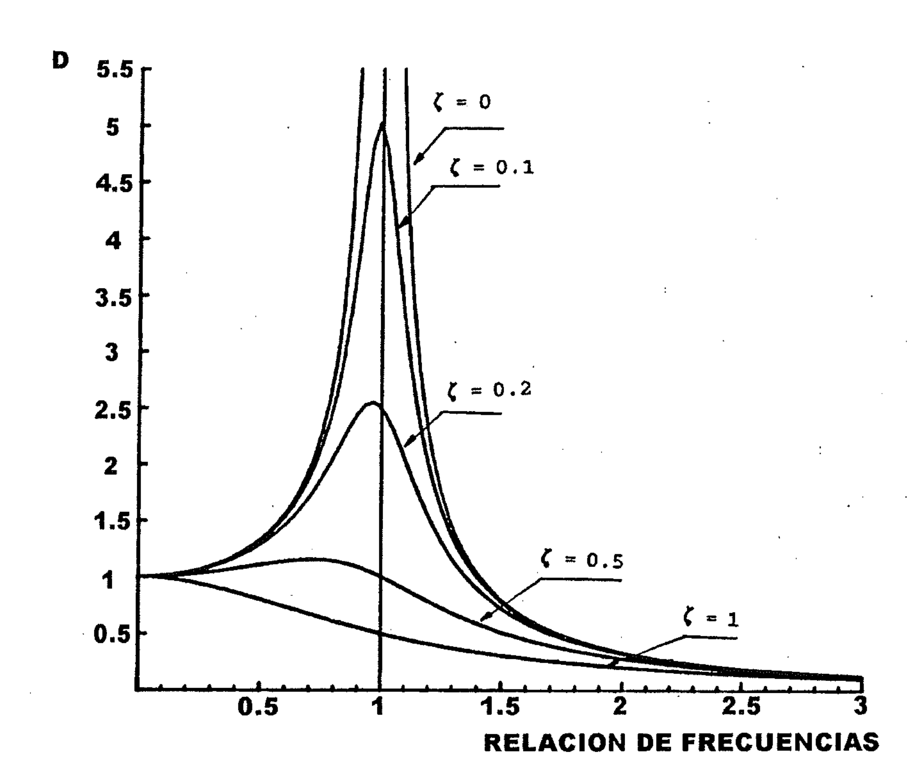


Fig.1.28

Las figuras 1.27 y 1.28 son la representación gráfica de las expresiones (1.3-12) y (1.3-14); y en ellas puede observarse lo siguiente:

- Tanto el ángulo de fase, ϕ_o, como el factor de amplificación D, dependen únicamente de la relación de frecuencias y del índice de amortiguamiento ζ.

- El amortiguamiento disminuye el factor de amplificación, D, para cualquier relación de frecuencias. En efecto, si se designa la relación de frecuencias por

$$\beta = \frac{\omega_0}{\omega}$$

se obtendría

$$D = \left[(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2\right]^{-1/2}$$

por lo que D_{mx} se produciría para una relación de frecuencias

$$\beta = \frac{\omega_0}{\omega} = \sqrt{1-2\zeta^2}$$

y sería igual a

$$D_{mx} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (1.3\text{-}15)$$

- En el caso en el que $\beta = 0$, el factor de amplificación es igual a la unidad, y en consecuencia

$$Y_0 = \delta_{st} = \frac{P_0}{k}$$

es decir, si la frecuencia de excitación, ω_o, es muy pequeña comparada con la frecuencia natural del sistema, ω, resulta que la amplitud del movimiento Y_o, es igual a la flecha estática, o lo que es igual, el fenómeno dinámico es despreciable, estando controlado el movimiento del sistema por la rigidez del mismo.

- Cuando $\beta = 1$, la frecuencia de excitación, ω_o coincide con la frecuencia natural del sistema, ω, siendo en este caso

$$D = \frac{1}{2\zeta}$$

en otras palabras, el factor de amplificación está controlado únicamente por el índice de amortiguamiento, independientemente de la masa o de la rigidez.

Así por ejemplo, para el caso en el que ζ = 2%, se obtendría un factor de amplificación igual a 25, lo que supone una amplitud de desplazamiento 25 veces superior a la que se obtendría en el caso de aplicación estática de la carga.

Esta amplificación máxima de la respuesta recibe el nombre de ***RESONANCIA***, fenómeno que puede producir el colapso del sistema.

La relación de amplitudes en la resonancia se denomina ***FACTOR DE CALIDAD***, Q, término utilizado por los sismólogos para indicar la atenuación de la respuesta.

Para índices de amortiguamiento bajos

$$\frac{Y_0}{\delta_{st}})_{mx} \approx \frac{Y_0}{\delta_{st}})_{\omega_0=0} = \frac{1}{2\zeta} = Q \qquad (1.3\text{-}16)$$

Por otra parte, el factor de calidad, Q, puede relacionarse con la Capacidad Específica de Amortiguamiento, definida en el apartado 1.2.2.3, como la relación entre la energía disipada en cada ciclo del movimiento y la energía almacenada en el sistema; en efecto, teniendo en cuenta la relación (1.2-28), y para índices de amortiguamiento bajos puede escribirse

$$\psi = \frac{E_d}{E} \approx 4\pi\zeta = \frac{2\pi}{Q} \qquad (1.3\text{-}17)$$

Las relaciones de frecuencia correspondientes a los puntos R_1 y R_2 para los que el factor de amplificación es igual a $Q/\sqrt{2}$, reciben el nombre de ***puntos de semipotencia*** y la diferencia entre sus frecuencias asociadas, ***ancho de banda de sistema.***

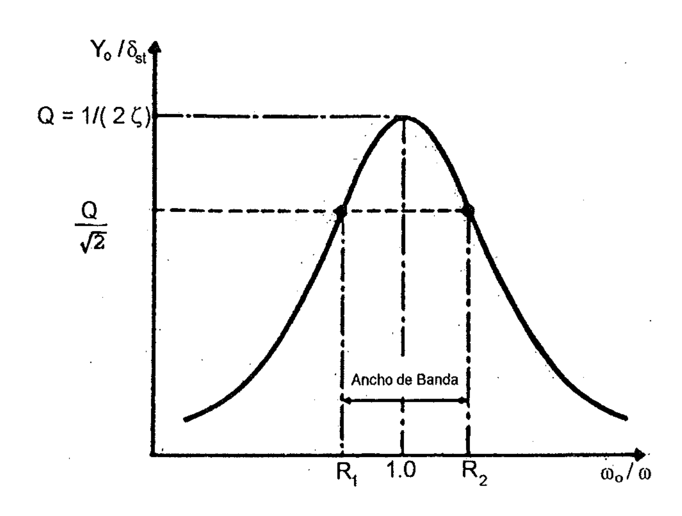


Fig.1.29

Los puntos de semipotencia, R_1 y R_2, pueden obtenerse al imponer la condición

$$D = \frac{Y_0}{\delta_{st}} = \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\zeta} \qquad (1.3\text{-}18)$$

es decir,

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\,\zeta} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}}$$

ecuación cuya resolución proporciona para β^2 los siguientes valores

$$\beta^2 = (1 - 2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2} \qquad (1.3\text{-}19)$$

por lo que

$$R_1^2 = (1 - 2\zeta^2) - 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}$$

$$R_2^2 = (1 - 2\zeta^2) + 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2} \qquad (1.3\text{-}20)$$

y en consecuencia

$$R_2^2 - R_1^2 = 4\zeta\sqrt{1+\zeta^2} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega^2}$$

si se toma

$$\omega = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \qquad (1.3\text{-}21)$$

el ancho de banda será

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega\, 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}$$

y para índices de amortiguamiento bajos

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega\, 2\zeta$$

siendo entonces el Factor de Calidad

$$Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{\omega}{\omega_2 - \omega_1} \qquad (1.3\text{-}22)$$

lo que sugiere, de nuevo, un procedimiento para estimar el índice de amortiguamiento viscoso de un sistema tal y como se indica en el ejemplo E.1-10

1.3.3.- FUERZAS TRANSMITIDAS Y AISLAMIENTO DE VIBRACIONES

Cuando, por ejemplo, un motor está situado sobre una base, transmite a la cimentación o estructura soporte fuerzas procedentes de desequilibrios internos o excitaciones externas transmitidas por otros sistemas mecánicos.

Esta fuerza transmitida puede reducirse mediante aisladores con un diseño apropiado de sus características.

Un modelo simple consiste en una base fija (B) sobre la que descansa el motor o máquina de masa me, unida a la cimentación mediante un muelle de constante k y un amortiguador c. El motor se considera sometido a una fuerza de excitación

$$\mathbf{F(t) = F_0 \, sen \, \omega_0 \, t}$$

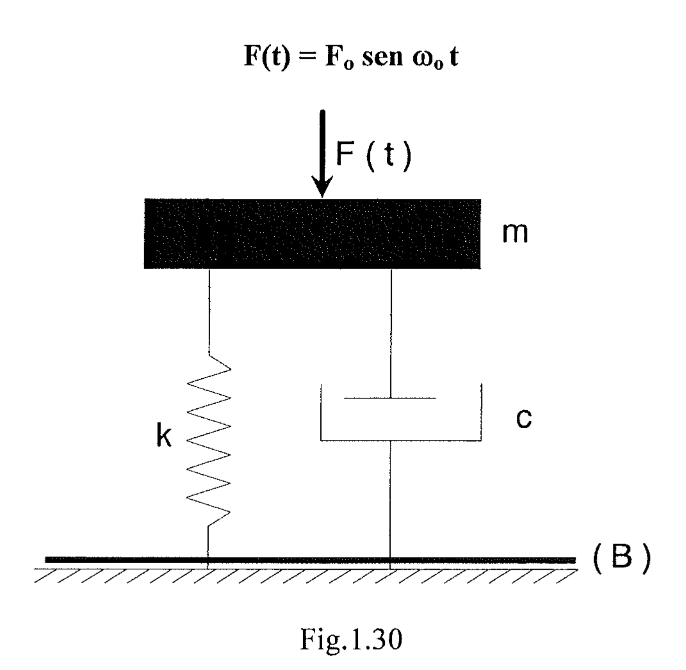


Fig.1.30

en estas condiciones, el comportamiento dinámico del sistema responde a la ecuación

$$\mathbf{m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \, sen \, \omega_0 t} \qquad (1.3\text{-}23)$$

siendo la respuesta del sistema del tipo

$$\mathbf{y = Y \, sen \, (\omega_0 t - \phi)}$$

La fuerza transmitida a la cimentación será la suma de

- La transmitida por el resorte

$$\mathbf{F_k = k \, Y \, sen \, (\omega_0 t - \phi)} \qquad (1.3\text{-}24)$$

- La transmitida por el amortiguador

$$F_c = c\,\omega_0\,Y\,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t - \phi) \tag{1.3-25}$$

por tanto, la Fuerza Transmitida será

$$F_k + F_c = k\,Y\,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t - \phi) + c\omega_0 Y \cos(\omega_0 t - \phi)$$

y la amplitud, F_t, de la misma

$$\begin{aligned} F_t &= \sqrt{(kY)^2 + (c\,\omega_0\,Y)^2} \\ &= Y\sqrt{k^2 + (c\omega_0)^2} \end{aligned} \tag{1.3-26}$$

recordando que

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}};\ \omega^2 = \frac{k}{m}$$

puede escribirse

$$\begin{aligned} F_t &= k\,Y\sqrt{1 + \frac{c^2\omega_o^2}{k^2}} = \\ &= k\,Y\sqrt{1 + \frac{4\zeta^2 km\,\omega_o^2}{k^2}} = \\ &= k\,Y\sqrt{1 + (2\zeta\frac{\omega_o}{\omega})^2} = \end{aligned} \tag{1.3-27}$$

por otra parte

$$Y = \frac{F_0 / k}{\sqrt{(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + 4\,\zeta^2\,\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \tag{1.3-28}$$

por lo que

$$F_t = F_0\,\frac{\sqrt{1 + 4\,\zeta^2\,\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}{\sqrt{(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + 4\,\zeta^2\,\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \tag{1.3-29}$$

y en consecuencia el ***coeficiente de transmisibilidad***, razón de amplitudes entre la fuerza transmitida y la fuerza de excitación será

$$T_r = \frac{F_t}{F_0} \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}{\sqrt{(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \qquad (1.3\text{-}30)$$

la relación de frecuencias, $\beta = \omega_o/\omega$, para la cual $T_R = 1$, se obtendrá al imponer la citada condición; es decir

$$1 + 4\zeta^2\beta^2 = (1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2$$

por lo que

$$T_R = 1 \Rightarrow \begin{matrix} \beta = \sqrt{2} \\ \beta = 0 \end{matrix} \qquad (1.3\text{-}31)$$

En la figura 1.31, se recoge, para distintos índices de amortiguamiento, la representación gráfica del coeficiente de transmisibilidad correspondiente a la ecuación 1.3-30.

Como puede observarse, en la zona de frecuencias próximas a la de resonancia, el coeficiente de transmisibilidad, T_R, y en consecuencia la fuerza transmitida, son muy grandes, sobre todo para índices de amortiguamiento pequeños.

Por otra parte; la presencia de amortiguamiento disminuye, siempre, la amplitud del desplazamiento, pero *sólo disminuye la amplitud de la fuerza transmitida cuando la relación de frecuencias* $\beta < \sqrt{2}$. Por el contrario, si $\beta > \sqrt{2}$, la presencia de amortiguamiento, manteniendo $T_R < 1$, siempre aumenta la amplitud de la fuerza trasmitida.

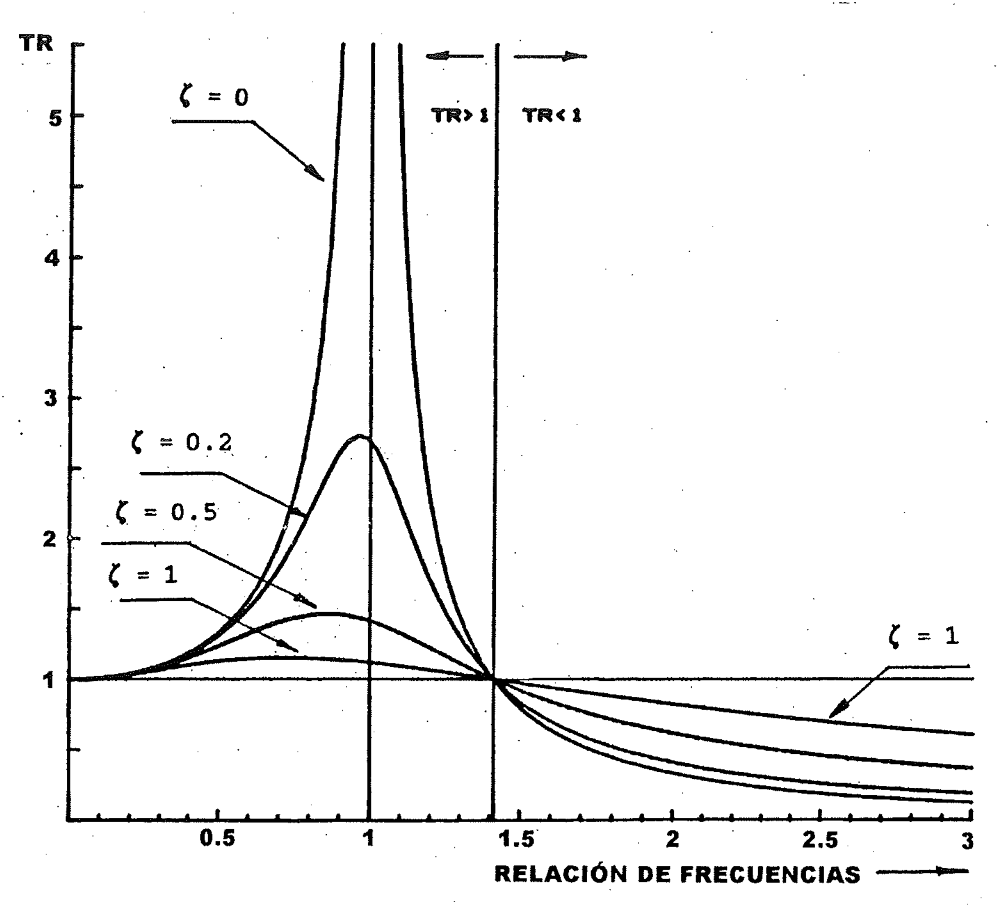


Fig.1.31

En consecuencia, si la frecuencia de excitación varía, los amortiguadores deberán diseñarse de manera que su índice de amortiguamiento sea

- Lo suficientemente grande como para limitar la amplitud del desplazamiento y fuerza transmitida cerca de la resonancia.
- Lo suficientemente pequeño como para no aumentar la fuerza transmitida cuando $\beta > \sqrt{2}$

1.3.4.- RESPUESTA A UNA CARGA ARMONICA DE TIPO GENERAL

En este caso la fuerza de excitación aplicada sobre el sistema es de la forma

$$F(t) = P_0 e^{i\alpha t} \qquad (1.3\text{-}32)$$

siendo en consecuencia la ecuación del movimiento

$$\ddot{y} + 2\alpha\zeta\omega\dot{y} + \omega^2 y = \frac{P_0}{m} e^{i\alpha t} \qquad (1.3\text{-}33)$$

que tendrá una solución particular del tipo

$$y_p(t) = Y e^{i\alpha t} \qquad (1.3\text{-}34)$$

Sustituyendo 1.3-34 en 1.3-33, se obtiene para Y

$$Y = \frac{\frac{P_0}{m}}{(\omega^2 - \alpha^2) + 2\zeta\alpha\omega i} \qquad (1.3\text{-}35)$$

o bien

$$Y = \frac{\frac{P_0}{m}}{\omega^2\left[(1 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}) + 2\zeta\frac{\alpha}{\omega} i\right]}$$

y teniendo en cuenta que $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$|Y| = \frac{\frac{P_0}{k}}{\sqrt{(1 - \frac{\alpha^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta\frac{\alpha}{\omega} i)^2}} \qquad (1.3\text{-}36)$$

es decir Y, es un número complejo que puede expresarse en la forma

$$Y = \frac{\frac{P_0}{k}}{(1 - \frac{\alpha^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta\frac{\alpha}{\omega} i)^2}\left[(1 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}) + i\,2\zeta\frac{\alpha}{\omega}\right] \qquad (1.3\text{-}37)$$

o bien

$$\mathbf{Y} = |\mathbf{Y}| \mathbf{e}^{-i\phi} \tag{1.3-38}$$

siendo $|\mathbf{Y}|$ el módulo

$$|\mathbf{Y}| = \frac{\frac{\mathbf{P_o}}{\mathbf{k}}}{\sqrt{(1-\frac{\alpha^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta\frac{\alpha}{\omega}\,\mathbf{i})^2}} \tag{1.3-39}$$

y ϕ el argumento, de manera que

$$\mathbf{tag}\phi = \frac{2\zeta\frac{\alpha}{\omega}}{1-\frac{\alpha^2}{\omega^2}} \tag{1.3-40}$$

por lo que la solución particular será

$$\mathbf{y_p(t)} = |\mathbf{Y}| \mathbf{e}^{i(\alpha t-\phi)} \tag{1.3-41}$$

La ecuación 1.3-36, también puede escribirse en la forma

$$\frac{\mathbf{Y}}{\delta_{st}} = \frac{1}{(1-\frac{\alpha^2}{\omega^2}) + 2\zeta\frac{\alpha}{\omega}\,\mathbf{i}} = \mathbf{H(i\alpha)} \tag{1.3-42}$$

1.3.5.- RESPUESTA A UN IMPULSO

En este apartado se realizará el estudio de la respuesta de un sistema frente a una solicitación cuyas características se indican en la figura 1.32

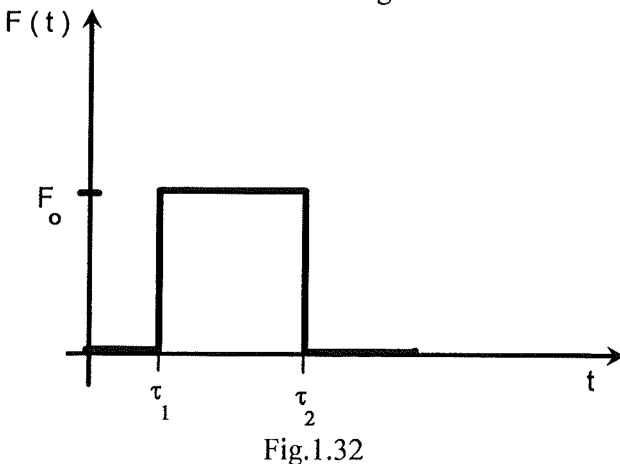


Fig.1.32

FASE I : $t < \tau_1$

no hay movimiento, por lo que la respuesta será

$$y(t) = 0$$

FASE II : $\tau_1 \le t \le \tau_2$ **Vibraciones forzadas**

La ecuación de comportamiento dinámico del sistema será

$$m\,\ddot{y} + c\,\dot{y} + k\,y = F_o$$

Cuya solución, tal y como se indico en el apartado 1.3.1, es de la forma

$$y(t) = \frac{F_o}{k} + e^{-\zeta\omega(t-\tau_1)}\left[A\cos\omega_d(t-\tau_1) + \beta\,\mathrm{sen}\omega_d(t-\tau_1)\right]$$

e imponiendo como condiciones iniciales del movimiento para esta fase

$$y(t=\tau_1) = 0$$
$$\dot{y}(t=\tau_1) = 0$$

se obtiene

$$y(t) = \frac{F_o}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega(t-\tau_1)}\left[\cos\omega_d(t-\tau_1) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\mathrm{sen}\omega_d(t-\tau_1)\right]\right] \qquad (1.3.43)$$

ecuación que para $t = \tau_2$ proporciona

* $$y_2 = y\,(t=\tau_2)$$
$$= \frac{F_0}{k}\left[1 - e^{-\zeta(\tau_2-\tau_1)}\left[\cos\,\omega_d(\tau_2-\tau_1) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\mathrm{sen}\,\omega_d(\tau_2-\tau_1)\right]\right] \qquad (1.3\text{-}44)$$

* $$v_2 = \dot{y}\,(t=\tau_2)$$

FASE III : $t > \tau_2$ **Vibraciones libres**

En este caso, la ecuación de equilibrio dinámico será

$$m\,\ddot{y} + c\,\dot{y} + k\,y = 0$$

cuya solución es

$$y(t) = e^{-\zeta\omega(t-\tau_2)}\left[A \cos\,\omega_d(t-\tau_2) + \beta \operatorname{sen}\,\omega_d(t-\tau_2)\right]$$

realizando el cálculo de las constantes A y B, teniendo en cuenta que las condiciones iniciales para esta fase son

$$y(t=\tau_2) = y_2$$
$$\dot{y}(t=\tau_2) = v_2$$

por lo que

$$y(t) = e^{-\zeta\omega(t-\tau_2)}\left[y_2 \cos\,\omega_d(t-\tau_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{v_2 + y_2\zeta\omega}{\omega_d} \operatorname{sen}\,\omega_d(t-\tau_2)\ \right] \qquad (1.3\text{-}45)$$

A partir de lo anterior, es posible obtener la respuesta a un impulso de breve duración; es decir, cuando: $\tau_1 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau$; por lo que

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 \rightarrow 0$$

con la condición previa, expresada en (1.3-44), se deduce que $y_2 = 0$, y por tanto, la respuesta a un impulso será

$$dy(t) = e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\frac{dv_2}{\omega_d} \operatorname{sen}\,\omega_d(t-\tau) \qquad (1.3\text{-}46)$$

obtenida al hacer $y_2 = 0$ en (1.3-45), y donde, dv_2, representa el cambio brusco de velocidad producido como consecuencia del impulso $F(\tau)\,d\tau$, es decir

$$dv_2 = \frac{1}{m}F(\tau)d\tau$$

siendo, finalmente, la respuesta

$$dy(t) = e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\frac{F(\tau)d\tau}{m\omega_d} \operatorname{sen}\,\omega_d(t-\tau) \qquad (1.3\text{-}47)$$

1.3.6.- RESPUESTA A UNA SOLICITACION DINAMICA DE TIPO GENERAL

Considérese un sistema ante una solicitación como la que se indica en la figura 1.33

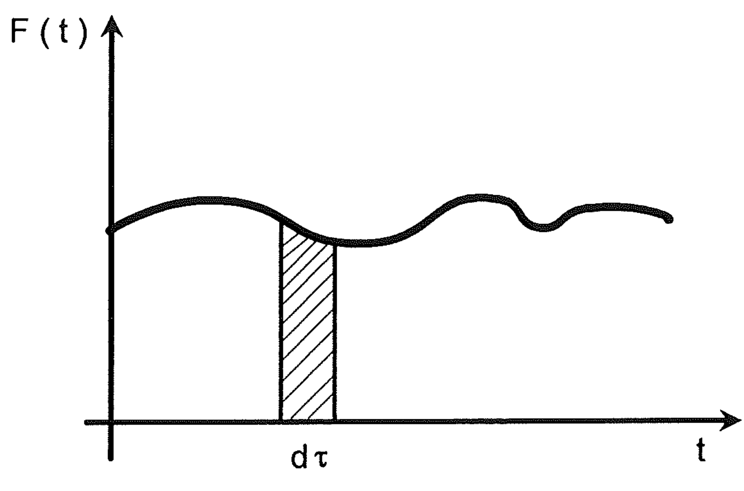


Fig.1.33

La respuesta en un instante **t** cualquiera, puede obtenerse por superposición d ellos obtenidos a impulsos de duración **dτ,** en los instantes precedentes a t; en efecto, teniendo en cuenta lo obtenido en el apartado anterior, puede escribirse

$$\mathbf{y(t)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m\omega_d}} \int_0^t \mathbf{e^{-\zeta\omega(t-\tau)} F(\tau) sen\ \omega_d (t-\tau) d\tau} \qquad (1.3\text{-}48)$$

la expresión anterior es denominada segunda **Integral de Duhamel** y representa la respuesta de un sistema a una solicitación de tipo general F(τ).

Para sistemas no amortiguados, $\zeta = 0$, por lo que

$$\mathbf{y(t)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m\omega}} \int_0^t \mathbf{F(\tau) sen\ \omega(t-\tau) d\tau} \qquad (1.3\text{-}49)$$

1.3.7.- RESPUESTA A SOLICITACIONES SISMICAS

El diseño de estructuras resistentes a sismos, requiere el conocimiento del movimiento producido en el suelo durante el terremoto; dicho movimiento consiste en traslaciones en cualquier dirección, combinadas con rotaciones alrededor de cualquier eje.

Es usual en ingeniería definir la carga sísmica mediante un **acelerograma**, que representa las componentes, en las direcciones horizontales y verticales de la aceleración producida, en un determinado lugar de la superficie del suelo, por un terremoto.

En la figura 1.34, se representa la componente N-S de la aceleración del suelo obtenida durante el terremoto de El Centro (1940); dicha aceleración puede integrarse obteniendo de esta forma los valores de la velocidad y del desplazamiento del suelo.

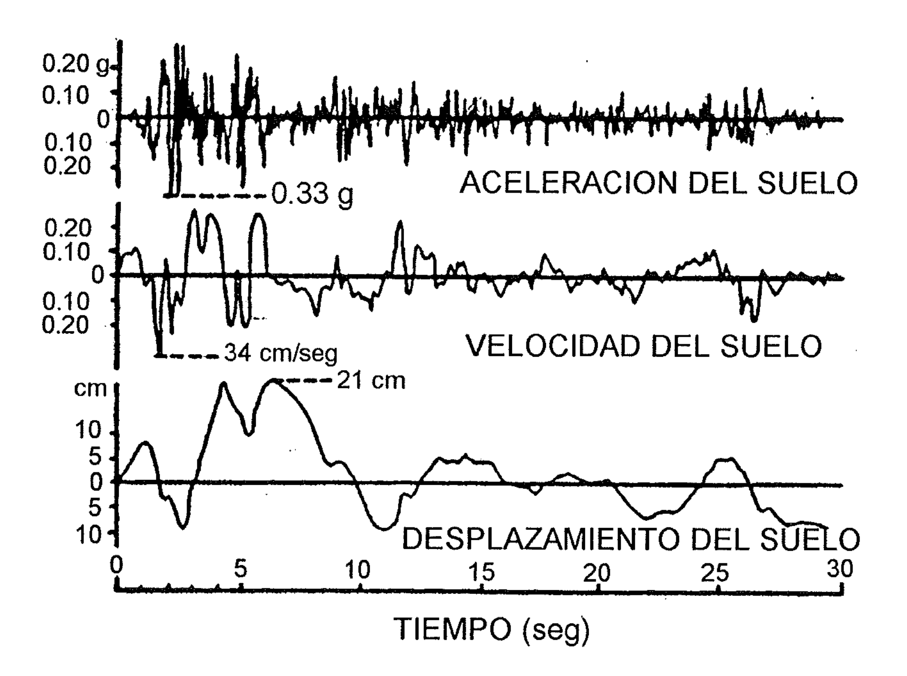


Fig.1.34

En ocasiones se precisa disponer de acelerogramas adaptados a las características del emplazamiento, no existiendo acelerogramas reales ad-hoc, por lo que se recurre a generar registros artificiales. En la figura 1.35, se representa el acelerograma sintético de Bogdanoff (1968), que se utiliza en ocasiones para generar, en sistemas lineales, desplazamientos semejantes a los reales; utilizando para ello una formula de representación de la aceleración del suelo dada por la expresión.

$$\mathbf{a_g(t) = t\, e^{-0.333\,t} \sum_{j=11}^{10} \cos(\omega_j t + \varphi_j) \;;\; t \geq 0}$$

los valores de ω_j y φ_j ,se indican en la tabla 1.3.1

j	ω_j	φ_j
1	6,00	3,7663
2	8,00	1,3422
3	10,00	4,8253
4	11,15	0,2528
5	12,30	4,5204
6	13,25	1,8834
7	14,15	1,3320
8	16,20	1,7852
9	17,35	0,1517
10	19,15	2,4881

Tabla 1.3.1

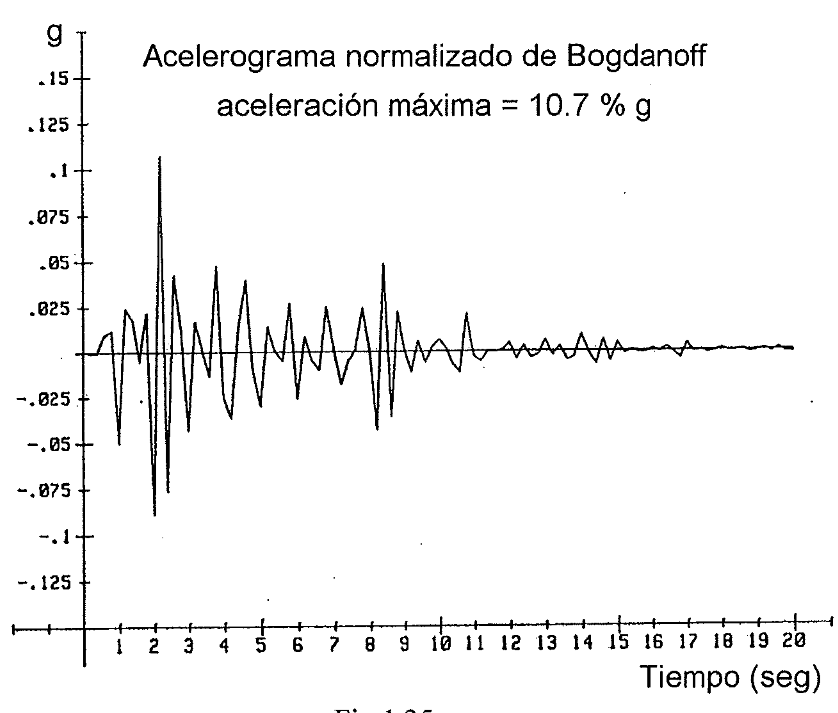


Fig.1.35

En el apartado 1.4.6, se vio que la respuesta forzada de un sistema con 1 g.d.l. a una carga $F(\tau)$ venía dada por la expresión

$$\mathbf{x(t)} = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)}F(\tau)\,\mathrm{sen}\;\omega_d)(t-\tau)\,d\tau \qquad (1.3\text{-}50)$$

En el caso de un desplazamiento $x_s(t)$ y otro relativo x(t), respondiendo el comportamiento a la ecuación

$$m\left[a_s(t) + \ddot{x}(t)\right] + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

o lo que es igual

$$m\,\ddot{x}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = -\,m\,a_s(t) \qquad (1.3\text{-}51)$$

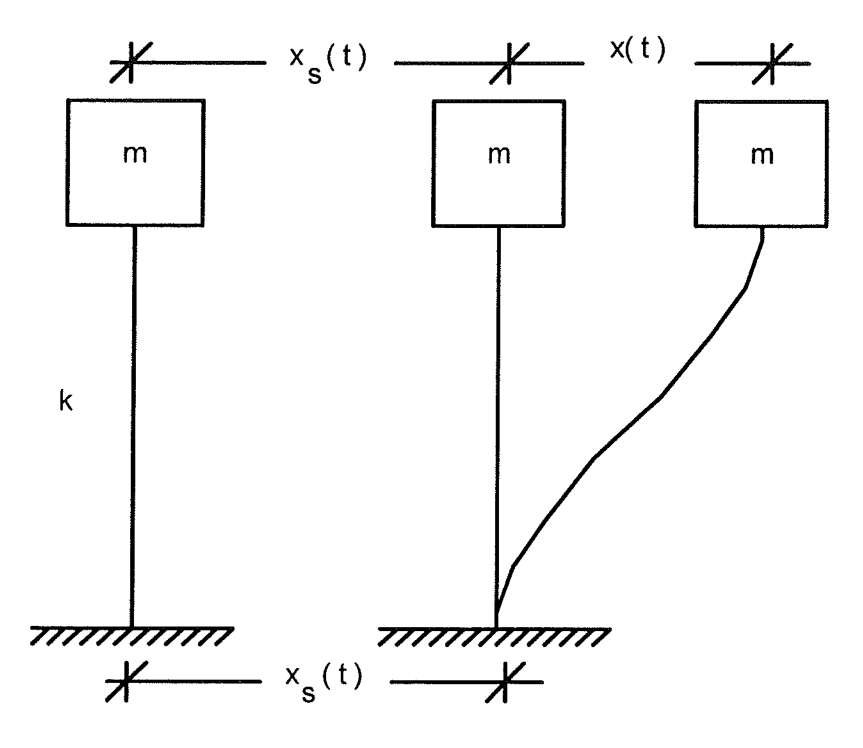


Fig.1.36

Por lo que la carga equivalente a la aceleración del suelo $a_s(t)$ será

$$F(t) = -m\,a_s(t) \qquad (1.3\text{-}52)$$

sustituyendo la relación (1.3-52) en (1.3-50) se obtiene que la respuesta del sistema

$$x(t) = -\frac{1}{\omega_d}\int_0^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)}a_s(\tau)\,\mathrm{sen}\,\omega_d(t-\tau)d\tau \qquad (1.3\text{-}53)$$

como puede observarse la cantidad subintegral depende del terremoto dado a través de la aceleración del suelo $\mathbf{a_s(t)}$, y de la estructura escogida mediante la frecuencia propia ω y el índice de amortiguamiento ζ.

1.3.8.- TRATAMIENTO NUMERICO

En la mayoría de los casos, y en especial con la solicitación sísmica, las cargas actuantes tienen una definición complicada que impide la obtención de soluciones de tipo analítico. Por ello se precisa disponer de un método de solución numérica que, de forma suficientemente aproximada, garantice la obtención de la respuesta.

En lo que sigue se va a representar un método mixto en el que se utiliza una solución exacta con una aproximación de la ley real. Es decir, se aproxima el acelerograma mediante trozos de recta y se integra exactamente el acelerograma modificado. El error de procedimiento se concentra así en la fase de modelado de la solicitación que, por otro lado, suele almacenarse de esta forma en los observatorios sismológicos.

El desarrollo se realiza de manera que las formulas obtenidas sean fácilmente programables.

Supóngase que la aceleración del suelo, $\ddot{x}_s(t) = a_g(t)$, puede representarse mediante una función lineal tal y como se indica en la figura 1.37

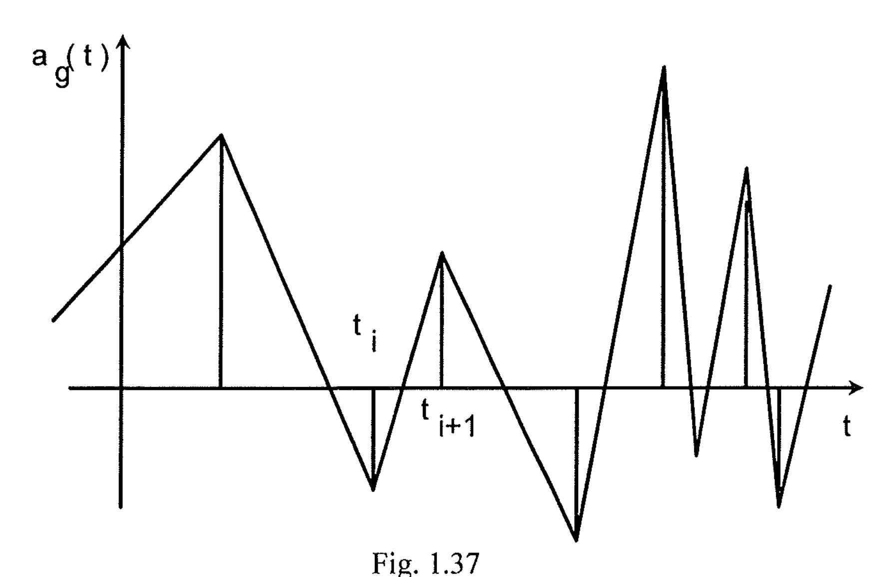


Fig. 1.37

Es decir

$$a_g(t) = a_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{t_{i+1} - t_i}(t - t_i) \; : \; t_i < t < t_i + 1$$

o bien designando por

$$\Delta a_i = a_{i+1} - a_i$$
$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

puede escribirse

$$a_g(t) = a_i + \frac{\Delta a_i}{\Delta t_i}(t - t_i) \quad (1.3.54)$$

por lo que la ecuación diferencial (1.3-51) toma la forma

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega\,\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = -a_i - \frac{\Delta a_i}{\Delta t_i}(t - t_i) \quad (1.3\text{-}55)$$

La solución de la ecuación diferencial (1.3-55), será la suma de la solución de la homogénea

$$x_H(t) = e^{-\zeta\omega(t-t_i)}\left[A\cos\omega_d(t - t_i) + B\,\mathrm{sen}\,\omega_d(t - t_i)\right]$$

más una particular de la completa; que será, para este caso, una expresión lineal

$$x_p(t) = \alpha t + \beta$$

por lo que

$$\dot{x}_p(t) = \alpha$$
$$\ddot{x}_p(t) = 0$$

valores que sustituidos en (1.3-55) proporciona

$$2\zeta\omega\alpha + \omega^2(\alpha t + \beta) = -(a_i - \frac{\Delta a_i}{\Delta t_i}t_i) - \frac{\Delta a_i}{\Delta t_i}t$$

o bien

$$(\omega^2\beta + 2\zeta\omega\alpha) + \omega^2\alpha t = -(a_i - \frac{\Delta a_i}{\Delta t_i}t_i) - \frac{\Delta a_i}{\Delta t_i}t$$

identificando coeficientes, se obtienen los valores de α y β

$$* \; \omega^2\alpha = -\frac{\Delta a_i}{\Delta t_i}$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\Delta a_i}{\Delta t_i}}$$

$$* \quad \omega^2\beta + 2\zeta\omega\alpha = -a_i + \frac{\Delta a_i}{\Delta t_i} t_i$$

$$\beta = \frac{1}{\omega^2}\left[-a_i + \frac{\Delta a_i}{\Delta t_i} t_i + \frac{2\zeta}{\omega}\frac{\Delta a_i}{\Delta t_i}\right]$$

$$\boxed{\beta = \frac{-a_i}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\frac{\Delta a_i}{\Delta t_i}\left[t_i + \frac{2\zeta}{\omega}\right]}$$

Siendo entonces la solución de la particular

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \alpha\, t + \beta \\ &= -\frac{1}{\omega^2}\frac{\Delta a_i}{\Delta t_i} t - \frac{a_i}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\frac{\Delta a_i}{\Delta t_i}(t_i + \frac{2\zeta}{\omega}) \\ &= -\frac{a_i}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\Delta a_i}{\Delta t_i}\left[t - t_i - \frac{2\zeta}{\omega}\right] \end{aligned}$$

La solución a la ecuación (1.3-55), para $t_i \le t \le t_{i+1}$, es por tanto

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\zeta\,\omega\,(t-t_i)}\left[A\cos\omega_d(t-t_i) + B\,\mathrm{sen}\,\omega_d(t-t_i)\right] - \\ &= -\frac{a_i}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\Delta a_i}{\Delta t_i}\left[t - t_i - \frac{2\zeta}{\omega}\right] \end{aligned} \qquad (1.3\text{-}56)$$

siendo $\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$.

Las constantes A y B se calcularán imponiendo las condiciones:

$$t = t_i \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = x_i \\ \dot{x} = \dot{x}_i \end{matrix}$$

siendo el desplazamiento, para $t = t_i$

$$x(t = t_i) = A - \frac{a_i}{\omega^2} + \frac{2\zeta}{\omega^3}\frac{\Delta a_i}{\Delta t_i} = x_i$$

expresión, a partir de la cual es posible determinar el valor de A

$$\boxed{A = x_i + \frac{a_i}{\omega^2} - \frac{2\zeta}{\omega^3}\frac{\Delta a_i}{\Delta t_i}}$$

por otra parte, al ser la velocidad igual a

$$\dot{x}(t) = -\zeta\omega e^{-\zeta\omega(t-t_i)}\left[A\cos\omega_d(t-t_i) + B\,\text{sen}\,\omega_d(t-t_i)\right] + \\ + e^{-\zeta\omega(t-t_i)}\left[-A\omega_d\,\text{sen}\,\omega_d(t-t_i) + B\omega_d\cos\omega_d(t-t_i)\right] - \\ -\frac{1}{\omega^2}\frac{\Delta a_i}{\Delta t_i} \qquad (1.3\text{-}56b)$$

el valor que toma para $t = t_i$ será

$$\dot{x}(t=t_i) = -\zeta\omega A + \omega_d B - \frac{1}{\omega^2}\frac{\Delta a_i}{\Delta t_i} = \dot{x}_i$$

de donde puede obtenerse el valor de B

$$\boxed{B = \frac{1}{\omega_d}\left[\dot{x}_i + \zeta\omega x_i - \frac{2\zeta^2-1}{\omega^2}\frac{\Delta a_i}{\Delta t_i} + \frac{\zeta}{\omega}a_i\right]}$$

En el supuesto de un intervalo de tiempo constante, $\Delta t_i = cte = \Delta t$, haciendo $t = t_{i+1}$, se obtienen para A y B los siguientes valores

$$A = x_i + \frac{a_i}{\omega^2} - \frac{2\zeta}{\omega^3}\frac{a_{i+1}-a_i}{\Delta t} = x_i + a_i\left[\frac{1}{\omega^2} + \frac{2\zeta}{\omega^3\Delta t}\right] - \frac{2\zeta}{\omega^3}\frac{a_{i+1}}{\Delta t}$$

$$B = \frac{1}{\omega_d}\left[\dot{x}_i + \zeta\omega x_i - \frac{2\zeta^2-1}{\omega^2\Delta t}(a_{i+1} - a_i) + \frac{\zeta}{\omega}a_i\right] = \\ = \frac{1}{\omega_d}\left[\dot{x}_i + \zeta\omega x_i - \frac{2\zeta^2-1}{\omega^2\Delta t}a_{i+1} + a_i\left[\frac{2\zeta^2-1}{\omega^2\Delta t} + \frac{\zeta}{\omega}\right]\right]$$

y para la solución particular

$$x_p(t) = -\frac{a_i}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\Delta a_i}{\Delta t_i}\left[t - t_i - \frac{2\zeta}{\omega}\right] = \\ = -\frac{a_i}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\frac{a_{i+1}-a_i}{\Delta t}\left[\Delta t - \frac{2\zeta}{\omega}\right] = \\ = -\frac{2\zeta}{\omega^2\Delta t}a_i + a_{i+1}\left[\frac{-1}{\omega^2} + \frac{2\zeta}{\omega^3\Delta t}\right]$$

La sustitución de A y B en la ecuación (1.3-56), proporciona una ley de recurrencia que permite determinar el valor del desplazamiento en el instante i +1

$$x_{i+1} = e^{-\zeta\omega\Delta t}\left[x_i + a_i\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{2\zeta}{\omega^3\Delta t}\right] - \frac{2\zeta}{\omega^3}\frac{a_{i+1}}{\Delta t}\right]\cos\omega_d\,\Delta t +$$
$$+ e^{-\zeta\omega\Delta t}\left[\frac{1}{\omega_d}\left[\dot{x}_i + \zeta\omega x_i - \frac{2\zeta^2-1}{\omega^2\Delta t}a_{i+1} - a_i\left[\frac{2\zeta^2-1}{\omega^2\Delta t} + \frac{\zeta}{\omega}\right]\right]\right]\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t -$$
$$- a_i\frac{2\zeta}{\omega^3\Delta t} + a_{i+1}\left[\frac{2\zeta}{\omega^3\Delta t} - \frac{1}{\omega^2}\right]$$

(1.3-57)

y reagrupando términos

$$x_{i+1} = e^{-\zeta\omega\Delta t}\left\{\cos\omega_d\,\Delta t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t\right\}x_i + \left\{e^{-\zeta\omega\Delta t}\frac{\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t}{\omega_d}\right\}\dot{x}_i +$$
$$+\left\{e^{-\zeta\omega\Delta t}\left[\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{2\zeta}{\omega^3\Delta t}\right)\cos\omega_d\,\Delta t + \left(\frac{2\zeta^2-1}{\omega^2\Delta t} + \frac{\zeta}{\omega}\right)\frac{\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t}{\omega_d}\right] - \frac{2\zeta}{\omega^3\Delta t}\right\}a_i +$$
$$+\left\{e^{-\zeta\omega\Delta t}\left[\frac{2\zeta}{\omega^3\Delta t}\cos\omega_d\,\Delta t + \frac{2\zeta^2-1}{\omega^2\Delta t}\frac{\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t}{\omega_d}\right] + \frac{2\zeta}{\omega^3\Delta t} - \frac{1}{\omega^2}\right\}a_{i+1}$$

(1.3-58)

finalmente, la velocidad en el instante i +1, se obtendrá al sustituir las constantes A y B en la expresión (1.3-56b)

$$\dot{x}_{i+1} = \left\{-e^{-\zeta\omega\Delta t}\frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t\right\}x_i + e^{-\zeta\omega\Delta t}\left\{\cos\omega_d\,\Delta t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t\right\}\dot{x}_i +$$
$$+\left\{e^{-\zeta\omega\Delta t}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2\zeta^2-1}{\omega^2\Delta t} + \frac{\zeta}{\omega}\right)\left(\cos\omega_d\,\Delta t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t\right) - \\ -\left(\frac{2\zeta}{\omega^3\Delta t} + \frac{1}{\omega^2}\right)\left(\omega_d\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t - \zeta\omega\,\omega_d\,\Delta t\right)\end{array}\right] + \frac{1}{\omega^2\Delta t}\right\}a_i +$$
$$+\left\{e^{-\zeta\omega\Delta t}\left[\begin{array}{l}\frac{2\zeta^2-1}{\omega^2\Delta t}\left(\cos\omega_d\,\Delta t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t\right) - \\ -\frac{2\zeta}{\omega^3\Delta t}\left(\omega_d\operatorname{sen}\omega_d\,\Delta t - \zeta\omega\,\omega_d\,\Delta t\right)\end{array}\right] + \frac{1}{\omega^2\,\Delta t}\right\}a_{i+1}$$

(1.3-59)

Las ecuaciones (1.3-58) y (1.3-59), en forma matricial quedan como sigue

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}} \begin{bmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} + \underline{\underline{E}} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix}$$

y si las matrices $\underline{\underline{D}}$ y $\underline{\underline{E}}$ se escriben en la forma

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \; ; \quad \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}$$

los coeficientes de las mismas serán

- Para la matriz $\underline{\underline{D}}$

$$d_{11} = e^{-\zeta \omega \Delta t} \left\{ \cos \omega_d \Delta t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega_d \Delta t \right\}$$

$$d_{12} = e^{-\zeta \omega \Delta t} \frac{\operatorname{sen} \omega_d \Delta t}{\omega_d}$$

$$d_{21} = - e^{-\zeta \omega \Delta t} \frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega_d \Delta t$$

$$d_{22} = e^{-\zeta \omega \Delta t} \left\{ \cos \omega_d \Delta t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega_d \Delta t \right\}$$

- Para la matriz $\underline{\underline{E}}$

$$e_{11} = e^{-\zeta \omega \Delta t} \left[\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{2\zeta}{\omega^3 \Delta t} \right) \cos \omega_d \Delta t + \left(\frac{2\zeta^2 - 1}{\omega^2 \Delta t} + \frac{\zeta}{\omega} \right) \frac{\operatorname{sen} \omega_d \Delta t}{\omega_d} \right] - \frac{2\zeta}{\omega^3 \Delta t}$$

$$e_{12} = e^{-\zeta \omega \Delta t} \left[\frac{2\zeta}{\omega^3 \Delta t} \cos \omega_d \Delta t + \frac{2\zeta^2 - 1}{\omega^2 \Delta t} \frac{\operatorname{sen} \omega_d \Delta t}{\omega_d} \right] + \frac{2\zeta}{\omega^3 \Delta t} - \frac{1}{\omega^2}$$

$$e_{21} = e^{-\zeta \omega \Delta t} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2\zeta^2 - 1}{\omega^2 \Delta t} + \frac{\zeta}{\omega} \right) \left(\cos \omega_d \Delta t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega_d \Delta t \right) - \\ - \left(\frac{2\zeta}{\omega^3 \Delta t} + \frac{1}{\omega^2} \right) \left(\omega_d \operatorname{sen} \omega_d \Delta t - \zeta \omega \, \omega_d \Delta t \right) \end{array} \right] + \frac{1}{\omega^2 \Delta t}$$

$$e_{22} = e^{-\zeta \omega \Delta t} \left[\begin{array}{l} \frac{2\zeta^2 - 1}{\omega^2 \Delta t} \left(\cos \omega_d \Delta t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega_d \Delta t \right) - \\ - \frac{2\zeta}{\omega^3 \Delta t} \left(\omega_d \operatorname{sen} \omega_d \Delta t - \zeta \omega \, \omega_d \Delta t \right) \end{array} \right] + \frac{1}{\omega^2 \Delta t}$$

Si el índice de amortiguamiento $\zeta = 0$, entonces $\omega_d = \omega$, por lo que los coeficientes de las matrices $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ y $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ se simplifican, tomando los siguientes valores

- Matriz $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$

$$d_{11} = \cos \omega \Delta t$$

$$d_{12} = \frac{\operatorname{sen} \omega \Delta t}{\omega}$$

$$d_{21} = -\ \omega \operatorname{sen} \omega \Delta t$$

$$d_{22} = \cos \omega \Delta t$$

- Matriz $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$

$$e_{11} = \frac{1}{\omega^2} \cos \omega \Delta t - \frac{\operatorname{sen} \omega \Delta t}{\omega^3 \Delta t}$$

$$e_{12} = \frac{\operatorname{sen} \omega \Delta t}{\omega^3 \Delta t} - \frac{1}{\omega^2}$$

$$e_{21} = \frac{\cos \omega \Delta t}{\omega^2 \Delta t} - \frac{\operatorname{sen} \omega \Delta t}{\omega} + \frac{1}{\omega^2 \Delta t}$$

$$e_{22} = \frac{\cos \omega \Delta t}{\omega^2 \Delta t} - \frac{1}{\omega^2 \Delta t}$$

1.3.9.- INSTRUMENTOS DE MEDIDA DE LAS VIBRACIONES

Son aplicaciones particulares de sistemas con 1 g.d.l., y consisten fundamentalmente en un sistema masa-muelle-amortiguador, montado sobre una base soporte tal y como se indica en la figura 1.38

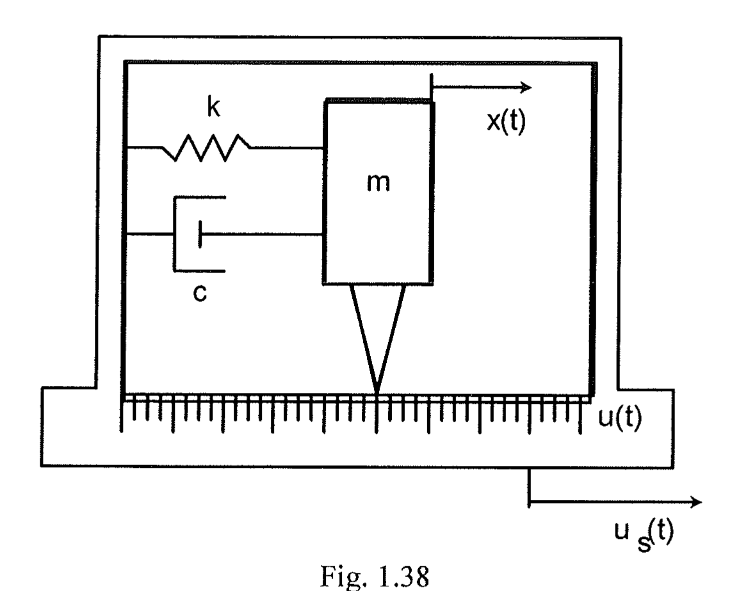


Fig. 1.38

Si se designa por **x (t)** al desplazamiento de la masa **m** ; el desplazamiento relativo **u(t)** entre la masa y la base será

$$\mathbf{u(t) = x(t) + u_s(t)} \qquad (1.3\text{-}60)$$

siendo la ecuación que caracteriza el movimiento del sistema

$$\mathbf{m\,\ddot{u}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,u(t) = 0} \qquad (1.3\text{-}61)$$

o lo que es igual, teniendo en cuenta (1.3-60)

$$\mathbf{m\,\ddot{u}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,u(t) = -m\,\ddot{u}_s(t)} \qquad (1.3\text{-}62)$$

y dividiendo por la masa

$$\mathbf{\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega\,\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = -\ddot{u}_s(t)} \qquad (1.3\text{-}63)$$

suponiendo que el movimiento del soporte, $\mathbf{u_s(t)}$, es armónico de frecuencia, ω_0, es decir

$$\mathbf{u_s(t) = U_s\,sen\,\omega_0 t} \qquad (1.3\text{-}64)$$

se tiene

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega\,\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = -U_s\omega_0^2 \operatorname{sen}\omega_0 t \qquad (1.3\text{-}65)$$

siendo la solución a la ecuación anterior

$$u(t) = U \operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi) \qquad (1.3\text{-}66)$$

donde la amplitud, U, y el ángulo de fase, ϕ, pueden expresarse mediante las relaciones

$$\phi = \arctan \frac{2\zeta \dfrac{\omega_0}{\omega}}{1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}} \qquad (1.3\text{-}67)$$

$$U = \frac{U_s \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}{\sqrt{(1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + 4\zeta^2 \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \qquad (1.3\text{-}68)$$

por otra parte, teniendo en cuenta que

$$\ddot{u}_s(t) = -\omega_0^2\, u_s(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{U}_s = \omega_0^2\, U_s$$

la relación de amplitudes entre el movimiento relativo y el del soporte, puede escribirse en la forma

$$\frac{U}{\ddot{U}_s} = \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + 4\zeta^2 \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \qquad (1.3\text{-}69)$$

Las expresiones 1.3-68 y 1.3-69, constituyen la base del funcionamiento de los instrumentos denominados ***VIBROMETRO*** y ***ACELEROMETRO***; en efecto

- Si la frecuencia natural ω, del sistema es pequeña, se tendrá que $\omega_0/\omega \to \infty$, y por tanto

$$\lim_{\omega_0/\omega \to \infty} \frac{U}{U_S} = 1 \quad \Rightarrow \quad U = U_S$$

dicho de otro modo, el desplazamiento relativo es igual al desplazamiento del soporte; por lo que el registrador de vibraciones lo que realmente está midiendo es el movimiento del soporte.

Este instrumento de medida recibe el nombre de ***VIBROMETRO,*** y las bajas frecuencias naturales que lo caracterizan, implica que estos sistemas sean excesivamente voluminosos, motivo por el que no suelen utilizarse en la mayoría de las aplicaciones prácticas.

En la figura 1.39 se representa la variación de U/U_s y el ángulo de fase ϕ en función de la relación de frecuencias ω_0/ω

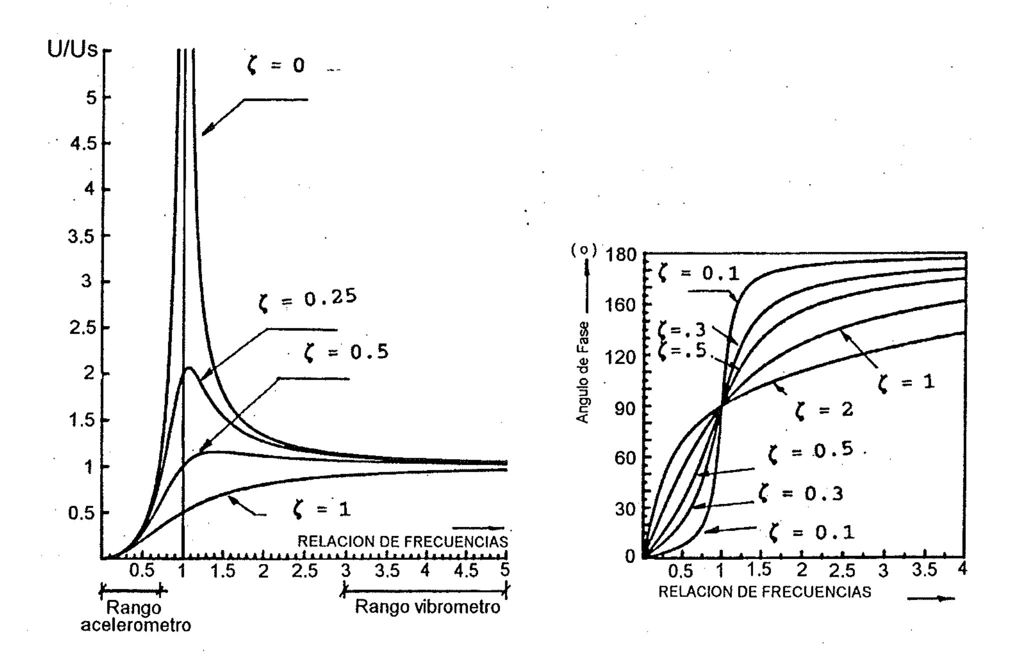


Fig.1.39

- Por el contrario para frecuencias naturales altas $\omega_0/\omega \rightarrow 0$, y la ecuación 1.3-69 se transforma en

$$U = \frac{\ddot{U}_s}{\omega^2}$$

es decir, el registrador de vibraciones mide la aceleración del soporte, por lo que recibe el nombre de ***ACELEROMETRO.***

En la figura 1.40, se representa, en función de la relación de frecuencias ω_0/ω , la variación de la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2 + 4\,\zeta^2\,\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

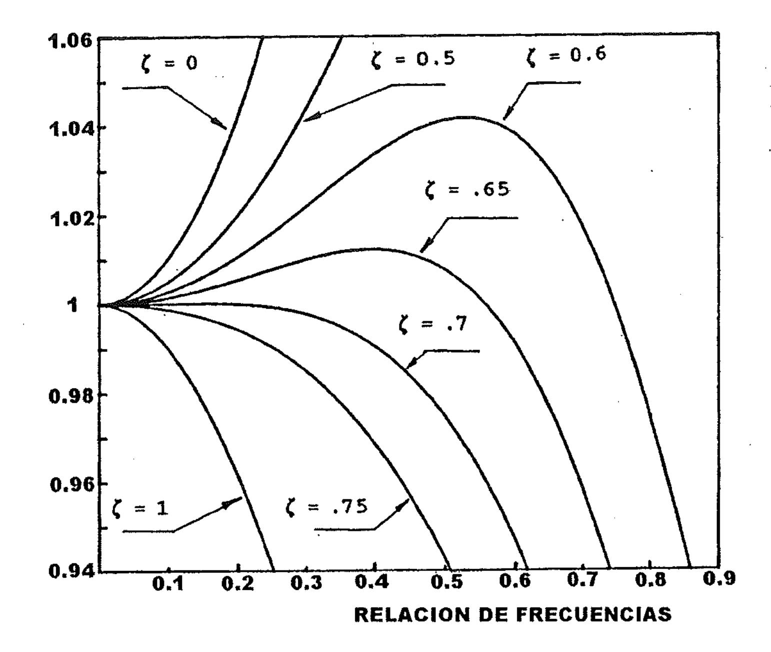


Fig. 1.40

La figura ha sido dibujada para una distorsión máxima de la medida del acelerómetro del 6%, y en ella puede observarse que el límite de utilización del mismo disminuye al aumentar el índice de amortiguamiento.

1.3.10.- ESPECTRO DE RESPUESTA ELÁSTICO

Aunque el concepto de espectro de respuesta elástico tiene orígenes anteriores (Biot 1941) y es utilizado en otras ramas de la ingeniería (Espectro de Choque), la comprensión de su utilidad y los primeros intentos por utilizarlo, como medio de definición de la acción sísmica, fueron debidos a Housner(1941); quien pretendía encontrar una medida de la intensidad del terremoto relacionada con la respuesta de las estructuras de forma racional y no subjetiva. Por ello propuso estudiar la respuesta máxima, a un terremoto dado, de sistemas con un grado de libertad y diferentes características dinámicas; reduciéndose los parámetros del sistema, en este caso a dos :

♦ **La frecuencia propia**

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

que mide la relación entre la masa y la rigidez del sistema

♦ El índice de amortiguamiento

$$\zeta = \frac{c}{c_{crit}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega}$$

que relaciona las propiedades de disipación de la energía con aquellas.

En el apartado 1.3.8, se ha presentado un procedimiento que permite determinar la respuesta **x (t)** de un sistema ante una solicitación sísmica caracterizada mediante un acelerograma **a (t)**.

En la figura 1.41, se presenta la respuesta de tres estructuras sometidas a una excitación sísmica, cuyo acelerograma está representado en la parte superior; en todas ellas se ha considerado un índice de amortiguamiento ζ = **2%**, la diferencia entre las tres se refiere a su frecuencia natural.

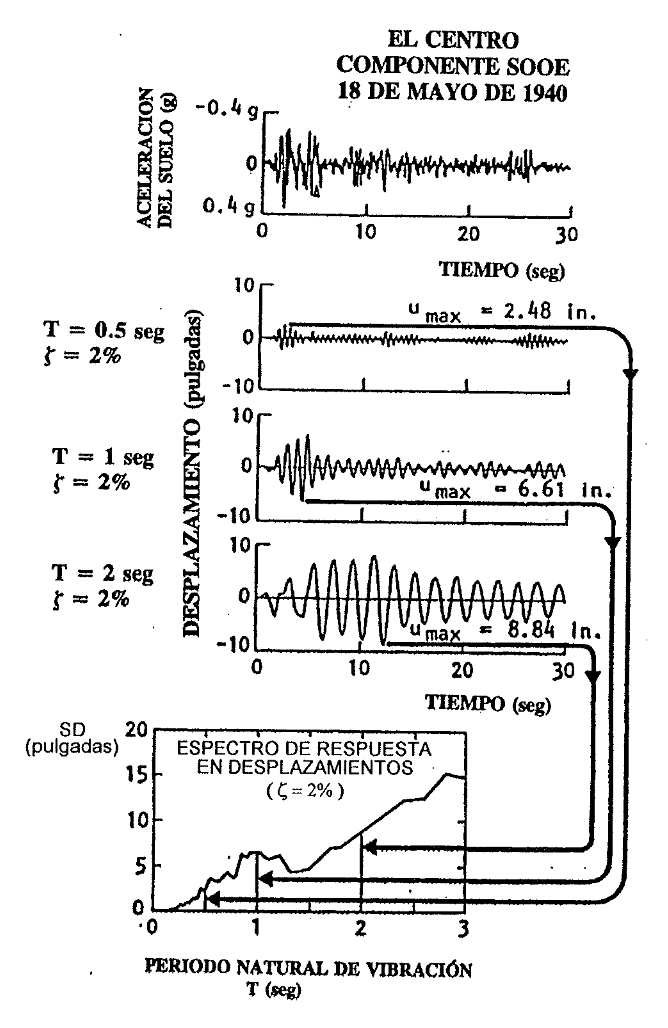


Fig. 1.41

Sin embargo, desde un punto de vista práctico solo se buscan los valores máximos, independientemente del signo, es decir

$$X_{máx} = \text{máx}\,|\,x(t)\,|$$

en la parte inferior de la figura 1.41, se ha dibujado el valor máximo de la respuesta en desplazamientos, en función del periodo natural de la estructura.

El gráfico corresponde a lo que habitualmente se denomina **ESPECTRO DE RESPUESTA EN DESPLAZAMIENTOS**, y se designa por **SD**.

$$SD = \text{máx}\,|\,x(t)\,| \qquad (1.3\text{-}70)$$

De forma análoga a lo descrito previamente podría determinarse el **ESPECTRO DE VELOCIDAD** (**SV**) y el de **ACELERACIÓN ABSOLUTA** (**SA**).

$$SV = \text{máx}\,|\,\dot{x}(t)\,| \qquad (1.3\text{-}71)$$

$$SA = \text{máx}\,|\,\ddot{x}(t) + a_s(t)\,| \qquad (1.3\text{-}72)$$

El **ESPECTRO DE RESPUESTA ELÁSTICO** es, por tanto, un diagrama de representación de los valores máximos de la respuesta de un sistema amortiguado con un grado de libertad, sometido a una excitación dinámica, en función de la frecuencia natural del sistema o alguna magnitud relacionada con ella.

Las expresiones analíticas correspondientes al espectro de respuesta son las siguientes:

♦ **Desplazamientos (SD)**

$$SD = \left[\frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \int_0^t a(\tau)\, e^{-\zeta\omega_n (t-\tau)} \,\text{sen}\, \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\,(t-\tau)\, d\tau \right]_{máx} \qquad (1.3\text{-}73a)$$

♦ **Velocidad (SV)**

$$SV = \left[\begin{array}{c} -\int_0^t a(\tau)\, e^{-\zeta\omega_n (t-\tau)} \cos\, \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\,(t-\tau)\, d\tau + \\ + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \int_0^t a(\tau)\, e^{-\zeta\omega_n (t-\tau)} \,\text{sen}\, \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\,(t-\tau)\, d\tau \end{array} \right]_{máx} \qquad (1.3\text{-}73b)$$

♦ **Aceleración (SA)**

$$SA = \begin{bmatrix} \dfrac{\omega_n (1-2\zeta^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \displaystyle\int_0^t a(\tau)\, e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \text{ sen } \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\,(t-\tau)\,d\tau + \\ + 2\omega_n \zeta \displaystyle\int_0^t a(\tau)\, e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \cos \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\,(t-\tau)\,d\tau \end{bmatrix}_{máx} \qquad (1.3\text{-}73c)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que la integral

$$\int_0^t a(\tau)\, e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \text{ sen } \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\,(t-\tau)\,d\tau \qquad (1.3\text{-}74)$$

tiene dimensiones de una velocidad, se designó con el término **PSEUDOVELOCIDAD (PSV)**, al máximo del valor absoluto de la citada integral, y con objeto de utilizar una escala independiente de la frecuencia, se definió el espectro de respuesta en desplazamientos, para estructuras con bajo amortiguamiento $(\omega_d \approx \omega)$, como :

$$SD = \frac{PSV}{\omega} \qquad (1.3\text{-}75)$$

La magnitud **PSV**, está relacionada con la **energía máxima** almacenada en el sistema:

$$\begin{aligned} E_{máx} &= \frac{1}{2} k \, [x(t)]^2_{máx} = \\ &= \frac{1}{2} k \left[\frac{PSV}{\omega}\right]^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \, [PSV]^2 \end{aligned} \qquad (1.3\text{-}76)$$

Otra medida del desplazamiento máximo se obtiene mediante la relación

$$SD = \frac{PSA}{\omega^2} \qquad (1.3\text{-}77)$$

La cantidad **PSA** se denomina **ESPECTRO DE RESPUESTA DE PSEUDOACELERACIÓN**. En las expresiones (1.3-73) puede observarse que sí $\zeta = 0$; **PSA** = **SA**, mientras que, **PSV** ≠ **SV**.

En la figura 1.42, se recogen, para la componente SOOE del terremoto de El Centro (ζ = 5%), los dos espectros de aceleración referenciados.

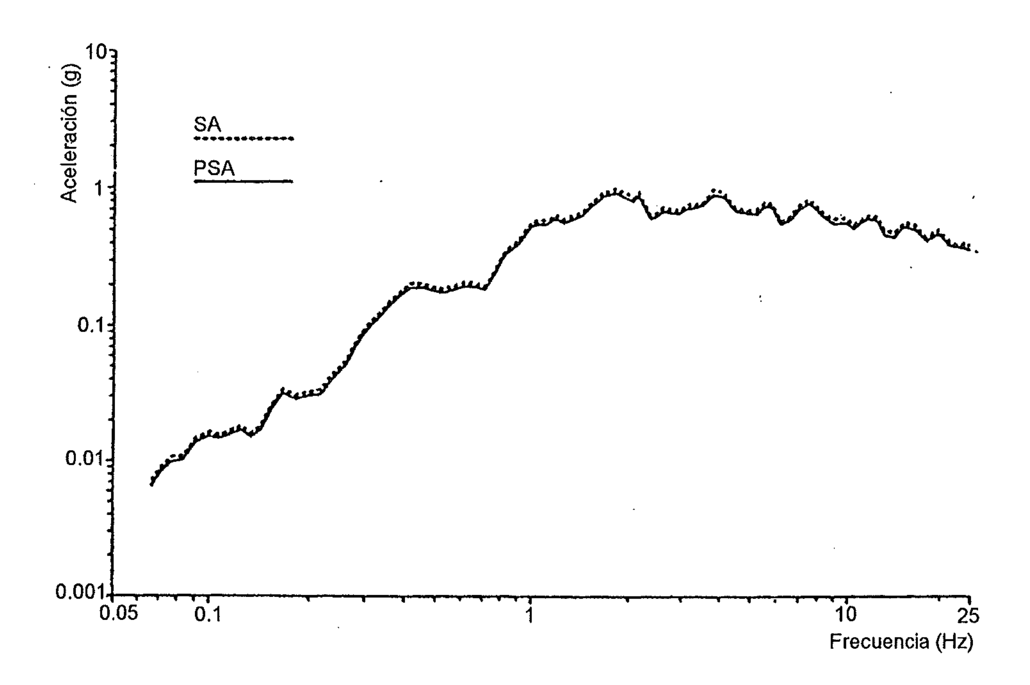


Fig. 1.42

El PSA tiene unidades de aceleración y está relacionado con la fuerza máxima en el muelle

$$\mathbf{F_{máx} = k\left|x(t)\right|_{máx} = k\ SD} \qquad (1.3\text{-}78)$$

y según (1.3-77)

$$\mathbf{F_{máx} = k\frac{PSA}{\omega^2} = m\ PSA} \qquad (1.3\text{-}79)$$

Se obtiene así una fórmula del tipo *"masa por aceleración"*, que permite definir la **fuerza estática equivalente** al movimiento sísmico, ya que produce el mismo desplazamiento máximo.

Esta idea es la base de los métodos de fuerzas equivalentes contenidos en las Normas y Códigos de Diseño.

Los tres espectros de respuesta: de desplazamiento (SD), de pseudo velocidad (SV) y de pseudo aceleración (PSA), están relacionados mediante las expresiones:

$$\mathbf{PSV} = \omega\, \mathbf{SD}$$

(1.3-80)

$$\mathbf{PSA} = \omega\, \mathbf{PSV}$$

y son formas diferentes de representar la misma información referente a la respuesta del sistema. Como cualquiera de los tres espectros puede ser obtenido del otro, es posible realizar una representación conjunta en el denominado **Diagrama Tripartito**, que en escala logarítmica permite dibujar las magnitudes espectrales (SD, PSV, PSA) en función de la frecuencia natural, ω, ó el período, **T.**

Tomando logaritmos en (1.3-80)

$$\mathbf{log\ PSV = log\ SD + log\ \omega}$$

(1.3-81)

$$\mathbf{log\ PSA = log\ PSA - log\ \omega}$$

estas relaciones, en el diagrama (log ω - log PSV), son rectas paralelas a las bisectrices del primer y segundo cuadrante, véase figura 1.43

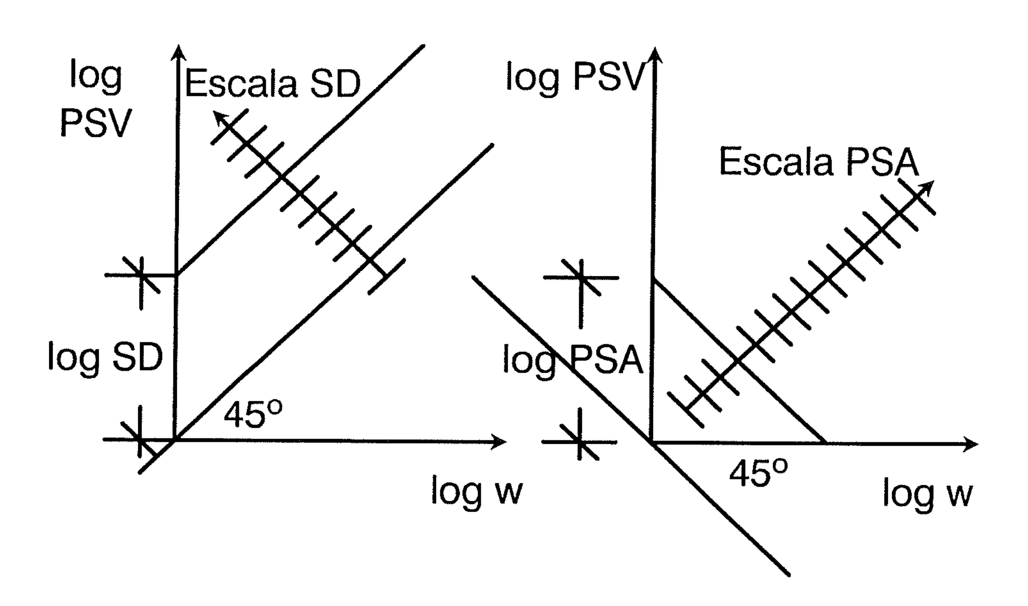


Fig. 1.43

En la figura 1.44, se recoge el diagrama tripartito del terremoto californiano KERN COUNTY.

KERN COUNTY, 21 de Julio de 1952
Magnitud 7.7 Aceleración máxima del suelo 0.057 g
PASADENA - CALTECH Componente SOOE
ζ = 0, 2, 5, 10 y 20 %

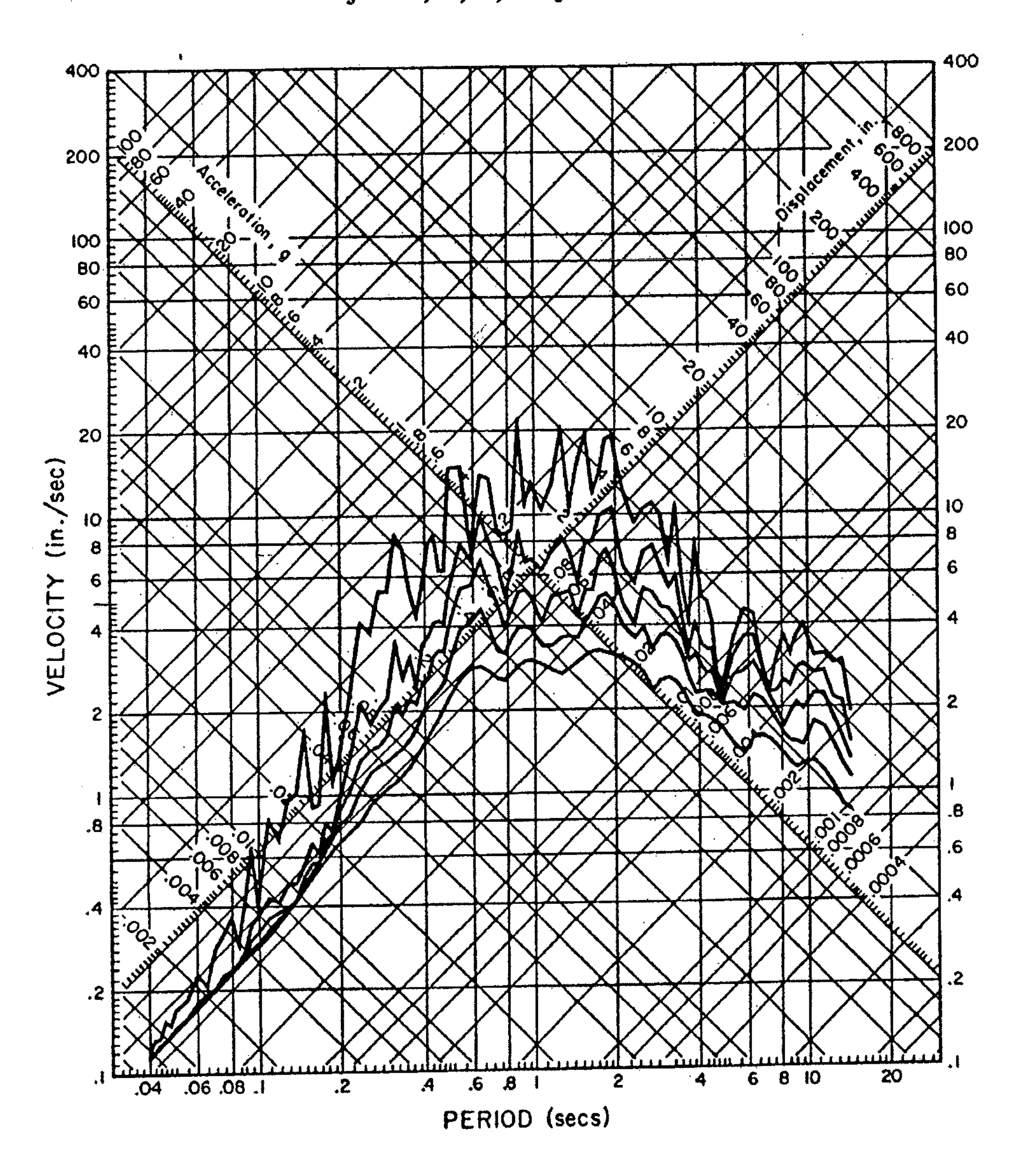
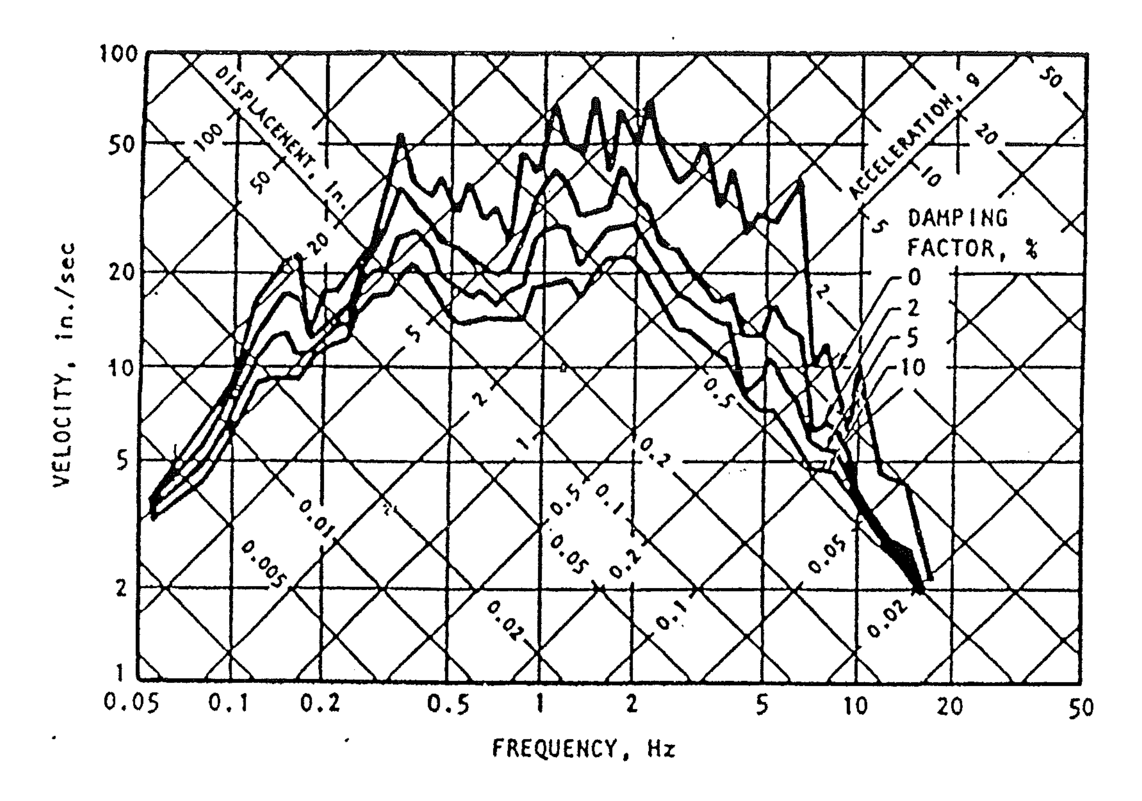


Fig. 1.44

En la figura 1.45 se recoge el diagrama tripartito de el terremoto de El Centro, (1940)



Response Spectra, El Centro Earthquake, May 18, 1940, North-South Direction.

Fig. 1.45

1.3.11.- ESPECTROS DE DISEÑO

Sin embargo, la utilidad del espectro de respuesta no se limita a la caracterización de un terremoto individual.

Conocidos los espectros para diferentes terremotos y a la vista de la forma semejante que presentan, se intentó buscar una curva promedio. Para conseguirlo, fue necesaria la normalización de los espectros, lo que se llevó a cabo mediante dos procedimientos diferentes.

El *primero*, históricamente, se debe a **Housner** (1959), que observó que **para una banda ancha de frecuencias el espectro de velocidad era horizontal**, por lo que propuso utilizar como base de normalización la denominada ***Intensidad Espectral***

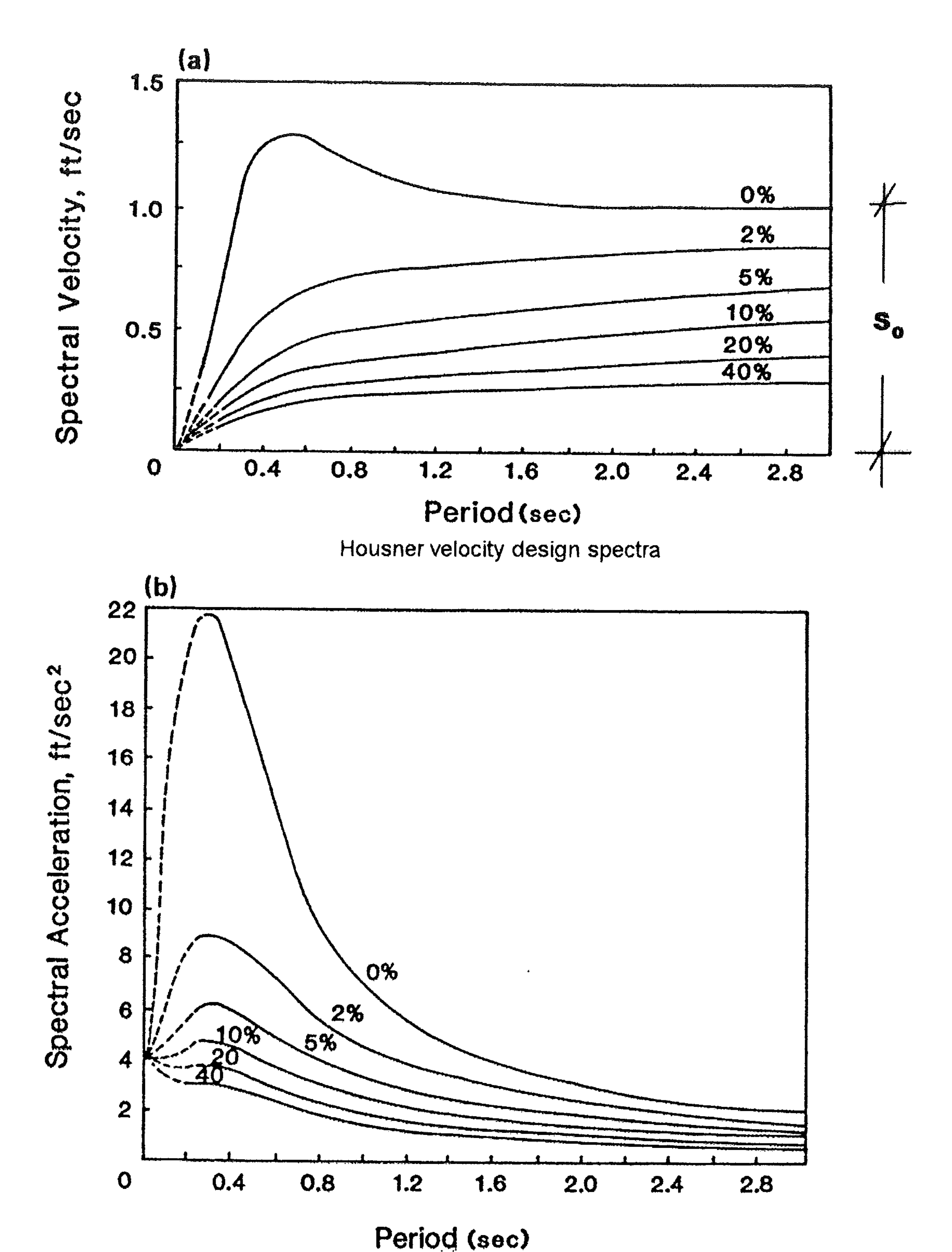
$$IS = \int_{T=0,4}^{T=2,5} PSV(\omega)\, d\omega \qquad (1.3\text{-}82)$$

o área comprendida bajo el espectro de Pseudo-Velocidad entre los periodos 0,4 y 2,5 segundos; recuperando el espectro original multiplicando por el valor de la intensidad espectral S_0 ; en la figura 1.46 se muestran los primeros espectros utilizados para el proyecto sísmico de estructuras.

Housner utilizó como base de la normalización los registros correspondientes a los terremotos de El Centro (1934), El Centro (1940), Olimpia (1949) y Taft (1952). Los valores de S_0 ,se indican en la siguiente tabla

Earthquake	Direction	S_0	Peak ground acceleration
El Centro 1934	E.W	2.2	0.08
	N.S	2.2	0.26
El Centro 1940	E.W	2.8	0.22
	N.S	3	0.33
Olympia 1949	E.W	2.1	0.31
	N.S	1.8	0.19
Taft 1952	E.W	1.8	0.16
	N.S	1.7	0.18

Tabla 1.3.11-1



Housner velocity design spectra

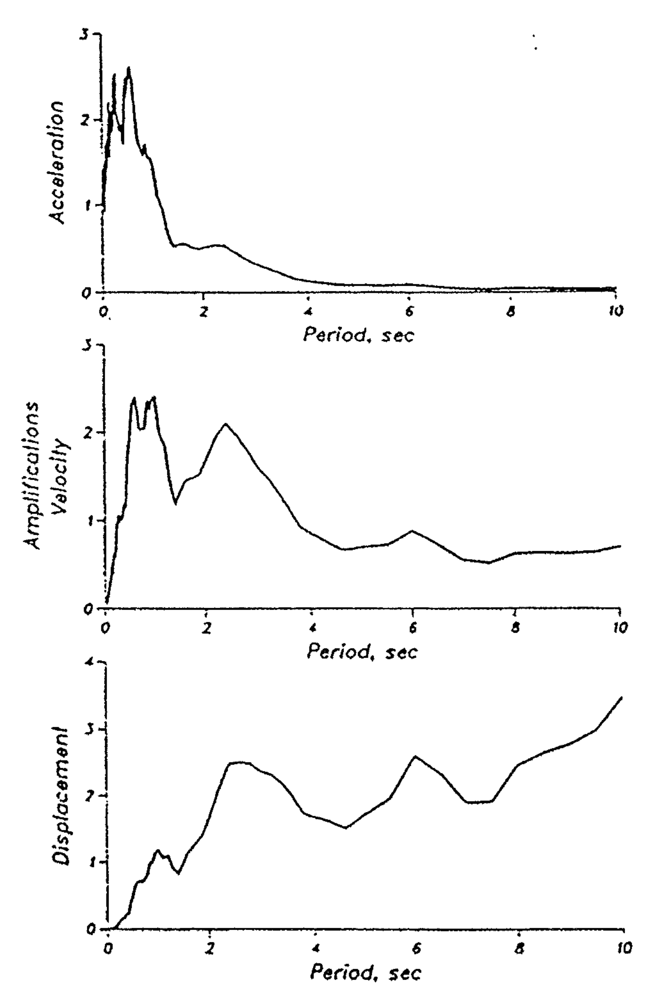
Housner acceleration design spectra, peak ground acceleration = 0,125 g

Fig. 1.46

La búsqueda de un factor de normalización más sencillo condujo a la utilización de la aceleración máxima del suelo, $\mathbf{a}_{\text{máx}}$, por lo que la expresión 1.3-73a puede escribirse como:

$$\frac{X_{\text{máx}}}{a_{\text{máx}}} = \left[\frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \int_0^t \frac{a(\tau)}{a_{\text{máx}}} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \text{sen}\ \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\,(t-\tau)d\tau \right]_{\text{máx}} \qquad (1.3\text{-}83)$$

Un espectro típico, puede verse en la figura 1.47 que corresponde de nuevo al terremoto de El Centro, y en él puede observarse que para **T = 0** el PSA arranca del valor unidad, ello se comprende teniendo en cuenta que periodos nulos se corresponde con estructuras infinitamente rígidas por lo que **la aceleración es la del suelo.**



Acceleration, velocity, and displacement amplifications plotted as a function of period for 5% damping for the S00E component of El Centro, the Imperial Valley earthquake of May 18, 1940.

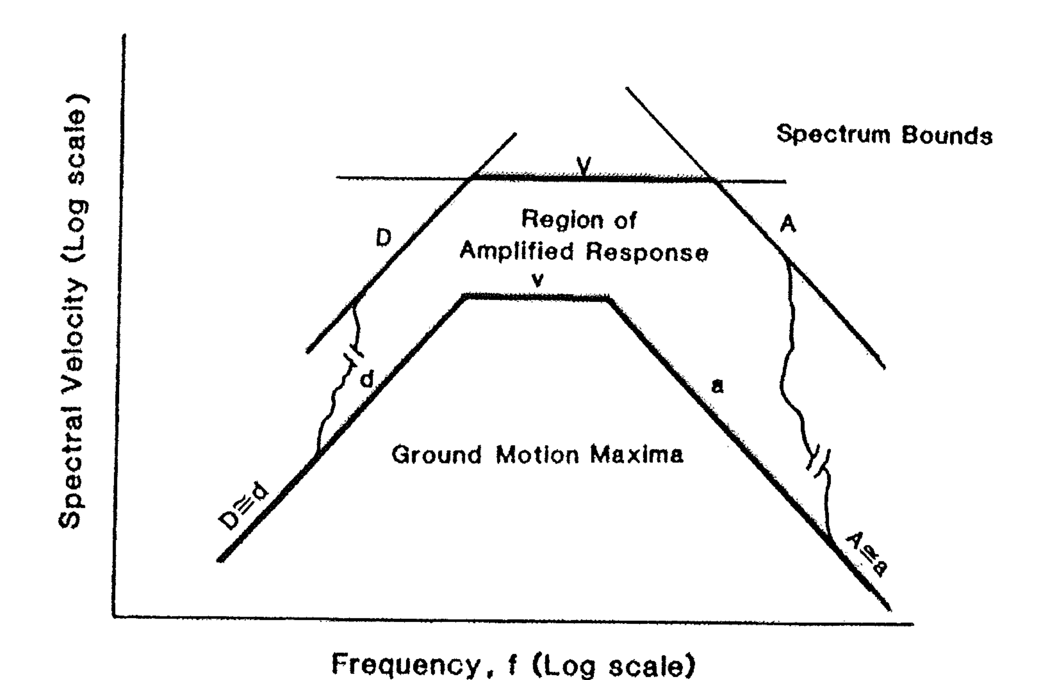
Fig.1.47

Cuando T→ ∞, se produce una situación semejante pero con los desplazamientos, debido a la absoluta flexibilidad del muelle la masa permanece en su lugar por lo que **el desplazamiento relativo coincide con el del suelo.**

Las ideas anteriores, extrapoladas para cualquier espectro, condujeron a la *segunda aproximación* que con idéntico objetivo fue realizada por **Newmark** en una serie de artículos publicados entre 1965 y 1973.

Newmark y sus colaboradores estudiaron los espectros de respuesta para diferentes tipos de impulsos comparándolos con los obtenidos para terremotos con objeto de encontrar reglas subyacentes.

En este sentido, observaron que, en un diagrama tripartito, la forma general de un espectro promemediado tomaba la forma que se indica en la figura 1.48, donde pueden observarse zonas claramente diferenciadas:



General shape of a smoothed response spectrum.

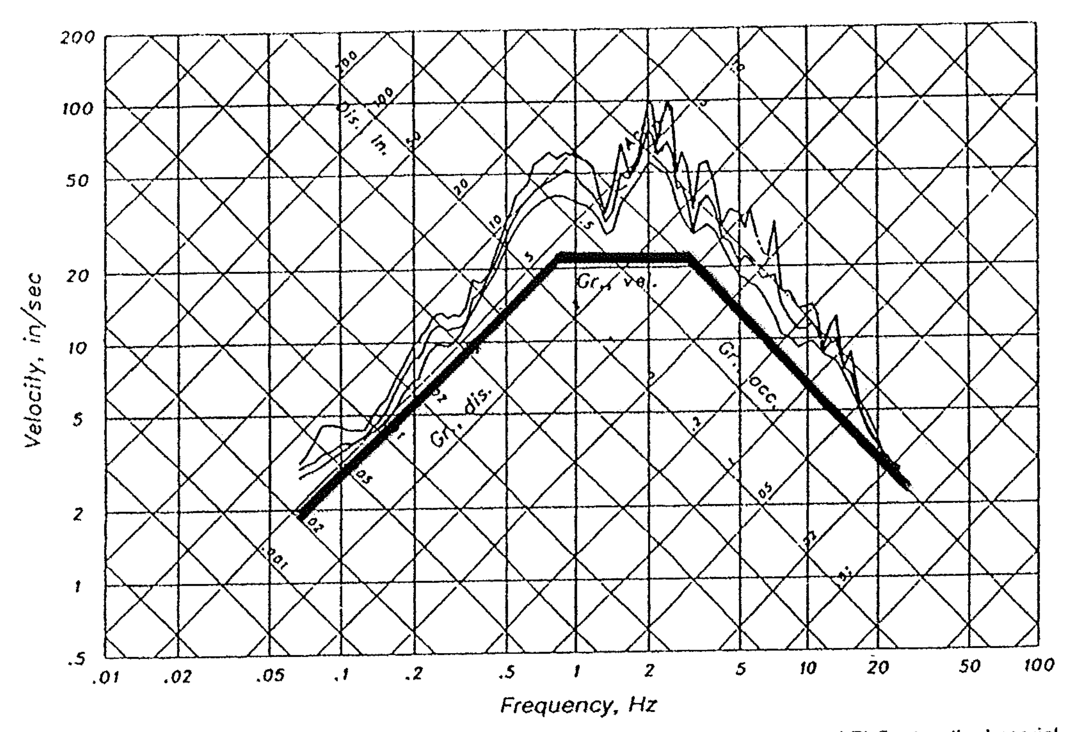
Fig.1.48

- En el rango de **bajas frecuencias**, la respuesta máxima en desplazamientos coincide con el desplazamiento del suelo.

- Para **altas frecuencias**, la aceleración máxima es prácticamente igual a la aceleración del suelo.

❖ En el rango de **frecuencias intermedias** puede distinguirse una región de respuesta en velocidad constante amplificada respecto a la máxima del suelo, que está flanqueada por una zona de amplificación de desplazamientos y otra en aceleraciones.

En la figura 1.49 se recoge nuevamente el diagrama tripartito de el terremoto de El Centro, donde puede observarse la irregularidad de los espectros de respuesta para un movimiento sísmico.



Response spectra for 2, 5, and 10% damping for the S00E component of El Centro, the Imperial Valley earthquake of May 18, 1940, together with the peak ground motion.

Fig.1.49

Utilizando diagramas del tipo indicado en la figura 1.48 es posible promediar resultados para los terremotos registrados y obtener así una envolvente de los mismos. Newmark propuso utilizar líneas rectas para obtener la envolvente en el diagrama tripartito y con **Hall** sugirió los siguientes valores de los factores de amplificación:

ÍNDICE DE AMORTIGUAMIENTO	FACTOR DE AMPLIFICACIÓN		
	DESPLAZAMIENTO	VELOCIDAD	ACELERACIÓN
0	2.5	4	6.4
0.5	2.2	3.6	5.8
1	2	3.2	5.2
2	1.8	2.8	4.3
5	1.4	1.9	2.6
10	1.1	1.3	1.5

Tabla 1.3.11-2

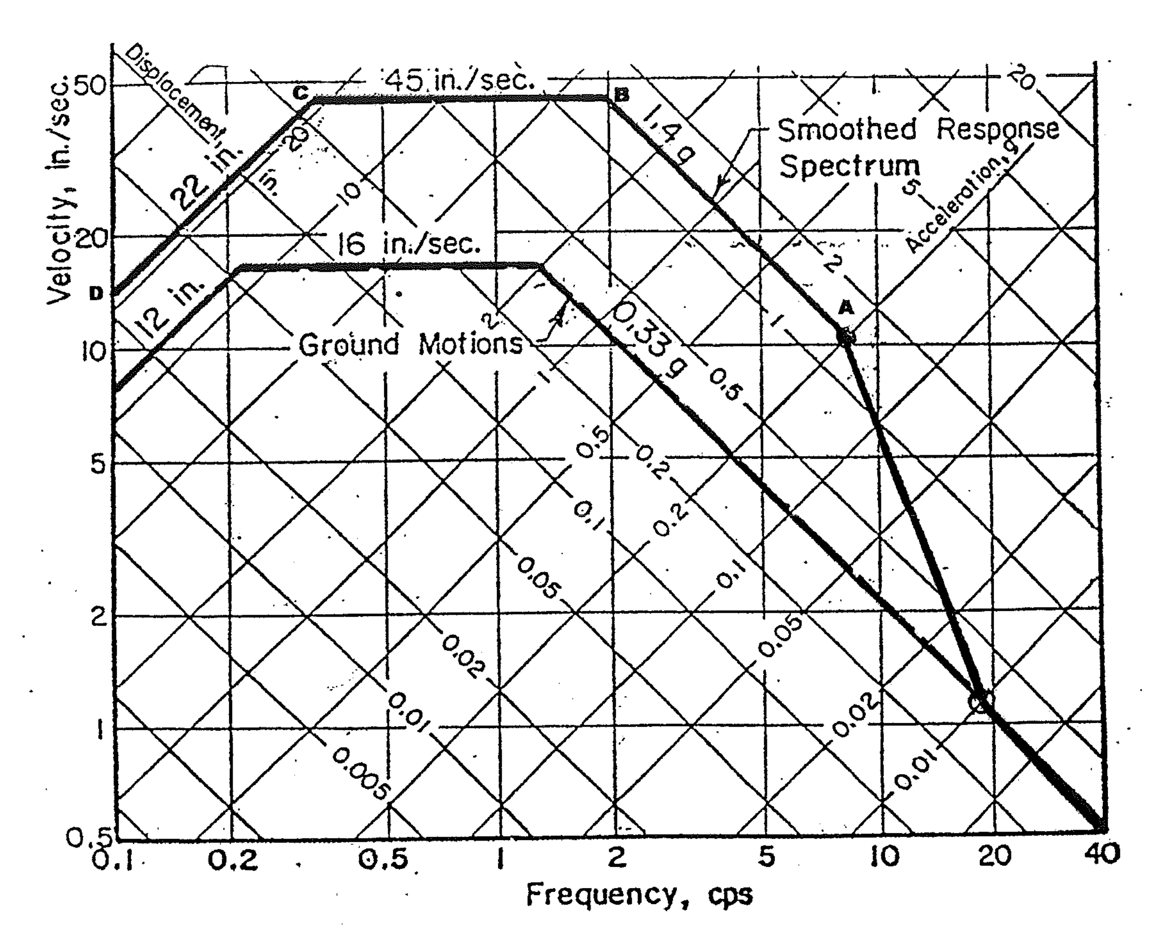
Si para **1 g**, la velocidad máxima del suelo se supone igual a **48 in/s** y el desplazamiento **36 in**, teniendo en cuenta que para el terremoto de El Centro $\mathbf{a_s} = \mathbf{0{,}33\ g}$, con las consideraciones previas la velocidad y el desplazamiento del suelo serán:

$$\begin{aligned} v_s &= 48 \times 0{,}33 = 15{,}84 \text{ in/s} \cong 16 \text{ in/s} \\ d_s &= 36 \times 0{,}33 = 11{,}88 \text{ in} \cong 12 \text{ in/s} \end{aligned} \qquad (1.3\text{-}84)$$

Por lo que los valores amplificados de la aceleración, la velocidad y el desplazamiento, se obtendrán a partir de los factores de amplificación de la tabla. Así, para un índice de amortiguamiento de un 2% : $f_d = 1{,}8$; $f_v = 2{,}8$; $f_a = 4{,}3$, por lo que para $d_o = 36\text{in}$; $v_o = 48\text{in/s}$; $a_o = 1\text{g}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} a &= f_a\, a_s = 4{,}3 \times 0{,}33 = 1{,}42 \text{ g} \approx 1{,}4\text{g} \\ v &= f_v\, v_s = 2{,}8 \times 15{,}84 = 44{,}35 \text{ in/s} \approx 45 \text{ in/s} \\ d &= f_d\, d_s = 1{,}8 \times 11{,}88 = 21{,}38 \text{ in} \approx 22 \text{ in/s} \end{aligned} \qquad (1.3\text{-}85)$$

con ello puede representarse el diagrama tripartito indicado en la figura 1.49



SMOOTHED TRIPARTITE LOGARITHMIC (0,33 g ; 2% CRITICAL DAMPING)

Fig.1.50

Tras una serie de estudios estadísticos la Nuclear Regulatory Conmission de USA propuso los espectros recogido en la figura 1.51 que forman la base de todos los espectros posteriores propuestos por las Códigos de buena práctica. Las frecuencias de control son: 33, 9, 2.5 y 0.25 Hz y se supone que para una aceleración de **1 g**, la velocidad máxima del suelo es igual a **48 in/s** y el desplazamiento **36 in.**

La tabla recoge los valores de amplificación correspondiente a cada frecuencia, así como la ley que permite interpolar la curva correspondiente a cada amortiguamiento ζ.

Las ordenadas corresponden a los valores resultantes de tomar la media más una desviación típica, lo que implica que la probabilidad de superación es sólo de un 15,9%.

	Amplification factors HORIZONTAL MOTIONS			
	Acceleration			Displacement
ζ	**A (33 Hz)**	**B (9 Hz)**	**C (2,5 Hz)**	**D (0,25 Hz)**
0.5	**1.0**	**4.96**	**5.95**	**3.2**
2.0	**1.0**	**3.54**	**4.25**	**2.5**
5.0	**1.0**	**2.61**	**3.13**	**2.05**
7.0	**1.0**	**2.27**	**2.72**	**1.88**
10.0	**1.0**	**1.9**	**2.28**	**1.7**

Tabla 1.3.11-3

POINT	Amplification factor Range 0.5% ≤ ζ ≤ 10%
B (9 Hz)	**4.25 – 1.02 ln ζ**
C (2,5 Hz)	**5.10 – 1.224 ln ζ**
D (0,25 Hz	**4.25 – 0.5 ln ζ**

Tabla 1.3.11-4

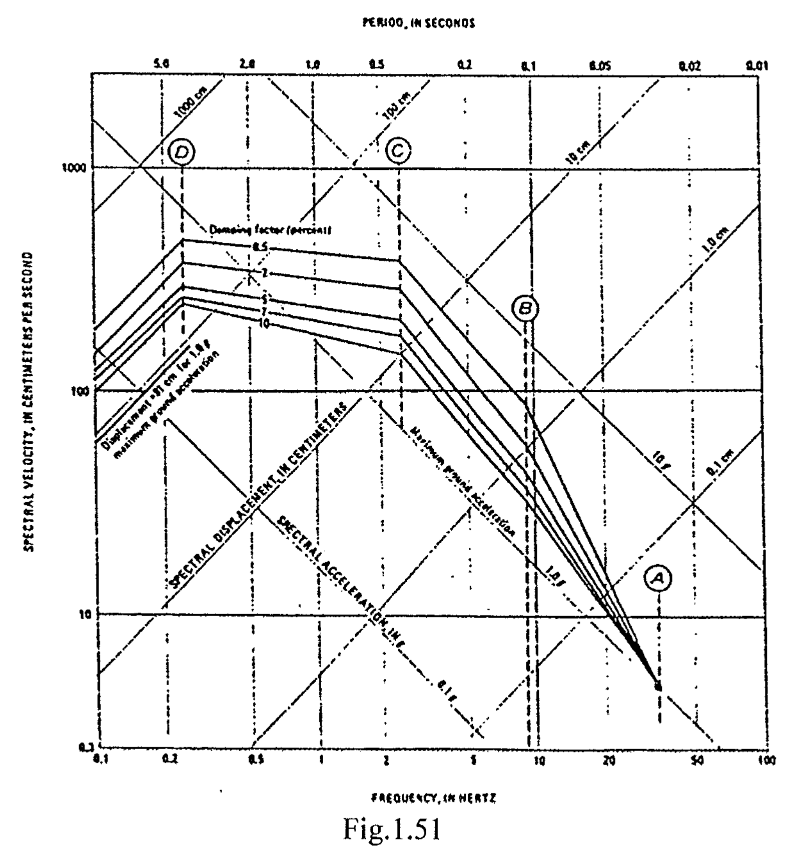


Fig.1.51

1.3.12.- ESPECTROS DE UTILIZADOS EN LOS CÓDIGOS DE PRÁCTICA

Si se transforma la figura 1.48 en un diagrama **(PSA,T)** y se tiene en cuenta que el punto de anclaje de la aceleración del suelo se estima en 30 Hz y la transición en 6 Hz, se obtiene la figura 1.52

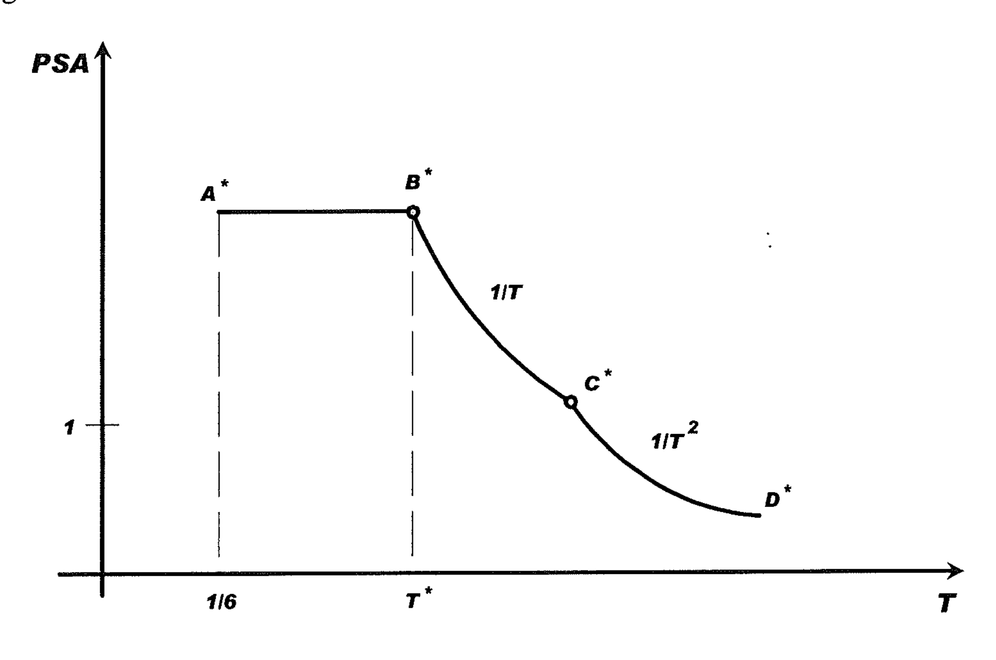


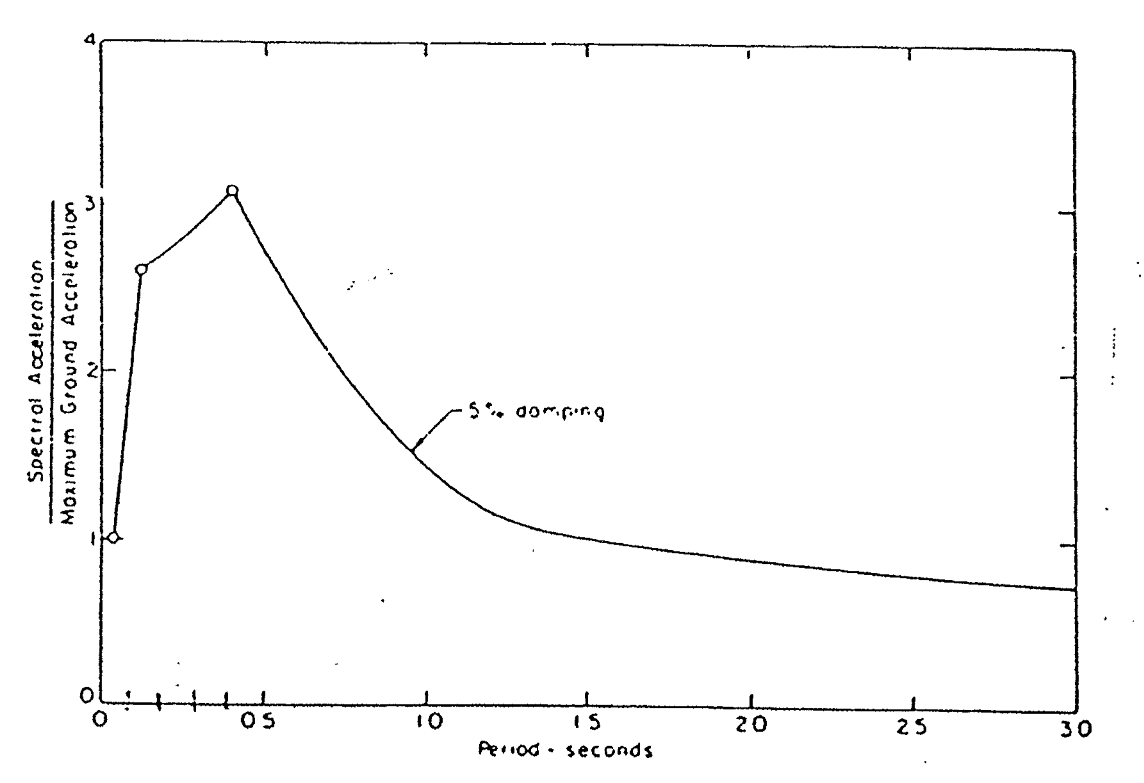
Fig.1.52

Con referencia a la figura 1.48, la zona AB al ser de PSA constante se transforma en A^*B^*.

En CB el PSV es constante y por tanto $\mathbf{PSA} = \omega\,\mathbf{PSV} = \frac{2\pi}{\mathbf{T}}\mathbf{PSV}$, en consecuencia la rama B^*C^* cae según 1/T.

Finalmente el tramo CD tiene un SD constante: $\mathbf{PSA} = \omega^2\,\mathbf{SD} = \frac{4\pi^2}{\mathbf{T}^2}\mathbf{SD}$ y por tanto la rama C^*D^* cae según $1/T^2$.

La figura 1.53 recoge la forma que presenta el espectro de Newmark al expresar el PSA en función de T.



AEC regulatory guide spectrum (84 percentile).

Fig.1.53

En líneas generales los espectros promedios propuestos por los diferentes códigos coinciden con los indicados previamente: se establecen unos puntos de anclaje en períodos, se definen unos factores de amplificación y una ley de caída para periodos altos; todo ello debido a la relación 1.3-79 y a la utilización generalizada de un método de fuerzas equivalentes.

El **eurocódigo 8** (1988), por ejemplo, establece el espectro elástico normalizado $\beta_e(T)$, figura 1.53, para un índice de amortiguamiento $\zeta = 5\%$, mediante cuatro parámetros: β_0, T_1, T_2 y k

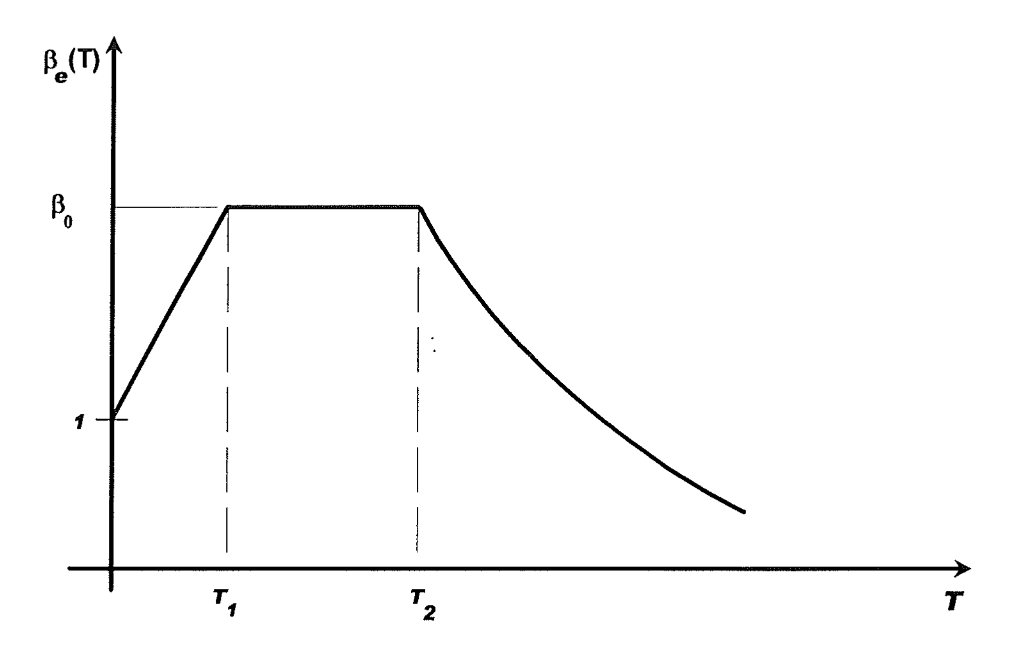


Fig.1.54

Y las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
0 < T < T_1 \quad &; \quad \beta_e(T) = 1 + \frac{T}{T_1}(\beta_0 - 1) \\
T_1 < T < T_2 \quad &; \quad \beta_e(T) = \beta_0 \qquad\qquad (1.3\text{-}85) \\
T > T_2 \quad &; \quad \beta_e(T) = \left(\frac{T_1}{T}\right)^k \beta_0
\end{aligned}
$$

advirtiendo que esta representación no es válida para valores de $T \geq 5$ segundos.

Los parámetros deben ajustarse según el tipo de terreno y en el caso de **suelo rocoso** toman los siguientes valores: $\boldsymbol{\beta_0 = 2{,}5}$; $\mathbf{T_1 = 0{,}2\ s}$; $\mathbf{T_2 = 0{,}49\ s}$ y **k = 1.**

Para otros valores del índice de amortiguamiento las ordenadas se corrigen con el factor $\sqrt{\frac{5}{\zeta}}$.

Como puede observarse la forma corresponde a la propuesta por Newmark y Hall, suplementada por la transición lineal entre T = o y T_1.

También el *Código Modelo del CEB para Proyecto Sismorresistente de Estructuras de Hormigón Armado* (1985), propone un espectro como el del EC8 con valores recomendados de $\mathbf{T_1 = 0,2\ s}$; $\mathbf{T_2 = 0,40\ s}$.

La *(NCSR-02) : Norma de construcción sismorresistente: parte general y edificación (RD 997/2002, de 2-'Sep)* establece un espectro normalizado de respuesta elástica en la superficie libre del terreno, figura 1.54, para aceleraciones horizontales, con un índice de amortiguamiento del 5%, definido por los siguientes valores:

$$\begin{aligned} T < T_A \quad &; \quad \alpha(T) = 1 + 1,5\frac{T}{T_A} \\ T_A \le T \le T_B \quad &; \quad \alpha(T) = 2,5 \\ T > T_B \quad &; \quad \alpha(T) = K\frac{C}{T} \end{aligned} \qquad (1.3\text{-}85)$$

donde:

- $\alpha(T)$ = Valor del espectro normalizado de respuesta elástica
- T = Período propio del oscilador en segundos
- K = Coeficiente de contribución, que tiene en cuenta la influencia de los distintos tipos de terremotos esperados en la peligrosidad sísmica del emplazamiento

TIPO DE TERRENO		C
I	**Roca compacta, suelo cementado o granular muy denso**	**1.0**
II	**Roca muy fracturada, suelos granulares densos o cohesivos duros**	**1.3**
III	**Suelo granular de compacidad media, o cohesivo de consistencia firme a muy firme**	**1.6**
IV	**Suelo granular suelto, o suelo cohesivo blando**	**2.0**

- C = Coeficiente que tiene en cuenta las características geotécnicas del terreno de cimentación

❖ T_A y T_B , períodos característicos del espectro de respuesta de valores:

$$T_A = K \frac{C}{10}$$

$$T_B = K \frac{C}{2,5}$$

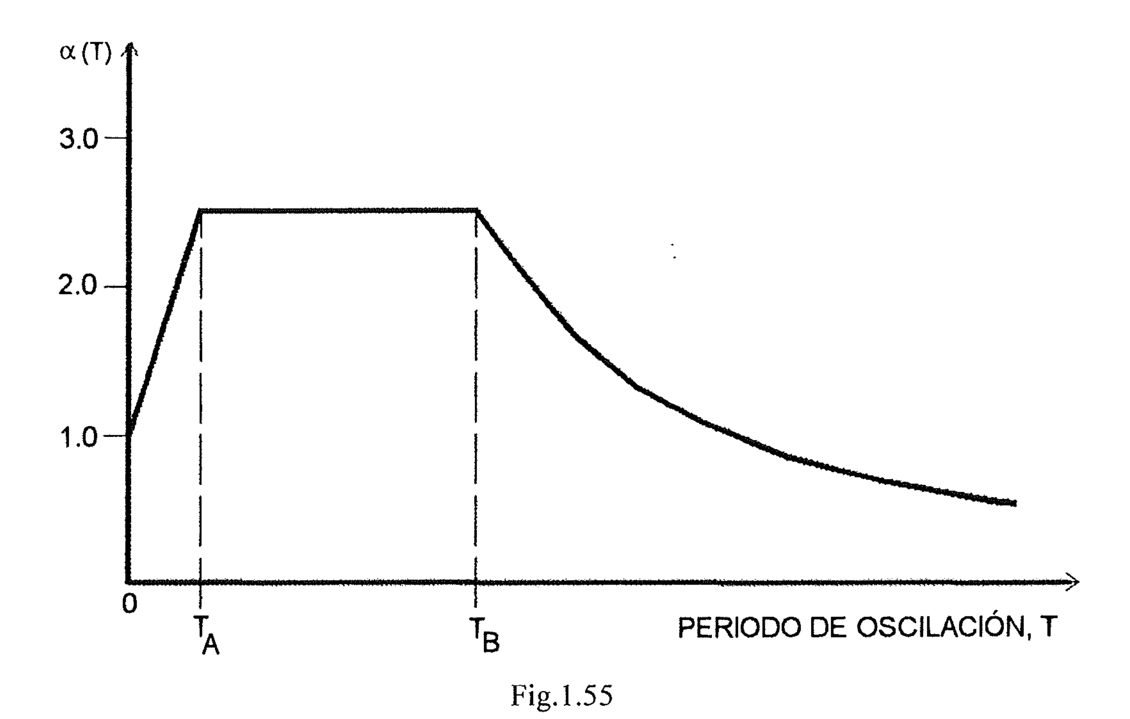


Fig.1.55

para algunas estructuras y modos de vibración con períodos superiores a 4 segundos, siempre y cuando se justifique, se podrán utilizar valores espectrales menores.

CAPITULO II

SISTEMAS CON N GRADOS DE LIBERTAD

2.1.-INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior, se han desarrollado los principales conceptos utilizados en el análisis dinámico de sistemas estructurales. Aunque la modelización de un sistema mediante un grado de libertad proporciona, en muchos casos, una buena aproximación de cara a un análisis preliminar, no siempre aporta resultados suficientemente precisos para un diseño final ya que la mayoría de los sistemas estructurales tienen particularidades que exigen un modelo mas detallado, lo que induce la introducción de nuevos g.d.l..

Como ya se mencionó previamente, el número de grados de libertad de un sistema es el número de coordenadas independientes que es preciso especificar para definir el movimiento de un sistema.

En un sistema con N g.d.l. cada una de las masas puede moverse independientemente de las otras, y solo bajo ciertas condiciones todas ellas tendrán un movimiento armónico con la misma frecuencia. Esta frecuencia recibe el nombre de ***FRECUENCIA NATURAL*** y la configuración deformada del sistema para esta frecuencia ***MODO DE VIBRACIÓN***, siendo el número de frecuencias naturales y modos de vibración de un sistema igual al número de grados de libertad del mismo. Es conveniente, por tanto, pensar en el Modo de Vibración como una configuración deformada en la que el movimiento de cada masa es una vibración armónica, alrededor de la posición de equilibrio, con una frecuencia especifica asociada a este modo de vibración.

2.2.- ECUACIONES QUE CARACTERIZAN EL MOVIMIENTO

Un sistema con dos grados de libertad solo requieren dos coordenadas para describir su movimiento. Así, el indicado en la Figura 2.1., tiene 2 g.d.l. que corresponden a los dos movimientos de traslación de la masa **m**

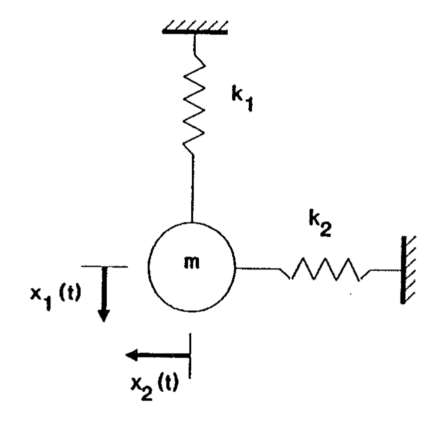
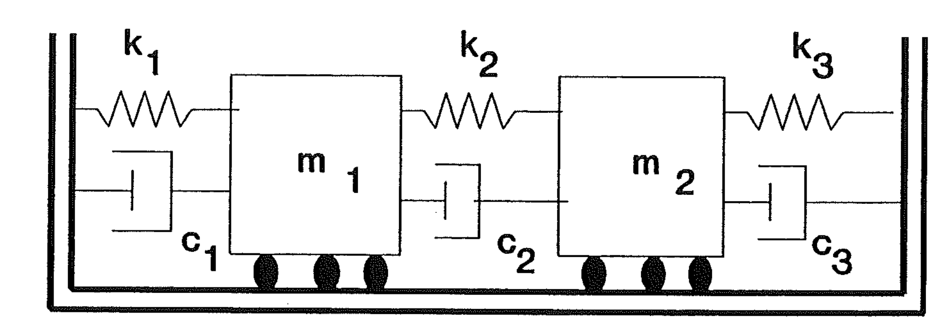


Fig. 2.1

En la Figura 2.2., se representa otro sistema con 2 g.d.l.; el movimiento se describe a partir de las coordenadas **$x_1(t)$** y **$x_2(t)$**, que definen las posiciones de las masas **m_1** y **m_2** en cualquier instante de tiempo t.



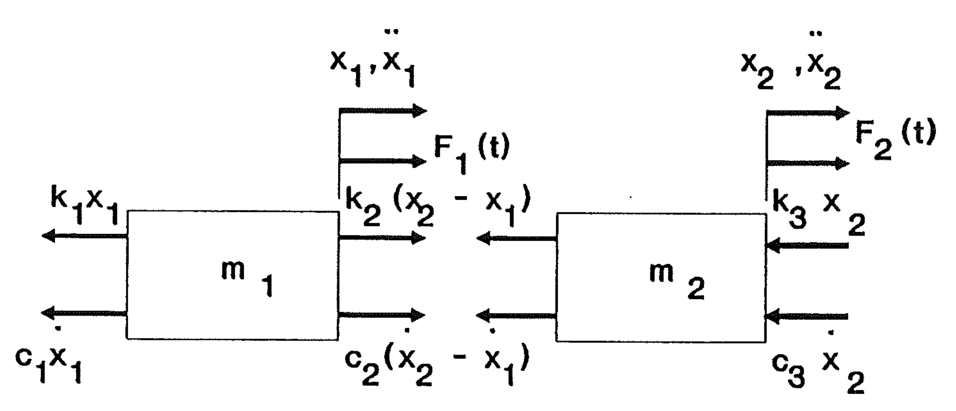


Fig. 2.2

La aplicación de la 2ª ley de Newton permite escribir

* **MASA m_1**

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_1 + k_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1$$

* **MASA m_2**

$$m_2 \ddot{x}_2 = F_2 - k_3 x_2 - c_3 \dot{x}_2 - k_2 (x_2 - x_1) - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

es decir

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 \dot{x}_2 = F_1 \qquad (2.2\text{-}1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = F_2 \qquad (2.2\text{-}2)$$

las ecuaciones (2.2-1) y (2.2-2) forman un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, ya que los dos movimientos **$x_1(t)$** y **$x_2(t)$** aparecen en ambas ecuaciones.

El sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial como sigue

$$\underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\ddot{x}}(t) + \underset{\sim}{c}\, \underset{\sim}{\dot{x}}(t) + \underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{F}(t) \qquad (2.2\text{-}3)$$

Obsérvese que la ecuación es totalmente semejante a la que caracteriza el comportamiento de un g.d.l., salvo por el carácter matricial de sus términos; $\underset{\sim}{m}$, $\underset{\sim}{c}$ y $\underset{\sim}{k}$, son las matrices de MASA, AMORTIGUAMIENTO Y RIGIDEZ del sistema

$$\underset{\sim}{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} ; \underset{\sim}{c} = \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix} ; \underset{\sim}{k} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$$

y, $\underset{\sim}{\ddot{x}}(t)$, $\underset{\sim}{\dot{x}}(t)$, $\underset{\sim}{x}(t)$ y $\underset{\sim}{F}(t)$ los vectores de ACELERACIÓN, VELOCIDAD, DESPLAZAMIENTO Y FUERZA

$$\underset{\sim}{\ddot{x}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} ; \underset{\sim}{\dot{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} ; \underset{\sim}{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ; \underset{\sim}{F}(t) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Un ejemplo de sistemas con tres grados de libertad es el pórtico simple indicado en la Figura 2.3.. Considerando que los dinteles son infinitamente rígidos en relación a los pilares, se introduce la hipótesis de que las uniones entre ellos no tienen posibilidad de rotación. Por otra parte suponiendo que toda la masa está concentrada en los dinteles se transforma un problema con infinitos grados de libertad en un sistema con tres grados de libertad, que corresponden a los desplazamientos horizontales de las masas.

De forma análoga a lo realizado en el ejemplo anterior, pueden escribirse las ecuaciones del movimiento

$$m_1\, \ddot{y}_1 = F_1 + k_2\, (y_2 - y_1) - k_1\, y_1$$

$$m_2\, \ddot{y}_2 = F_2 + k_3\, (y_3 - y_2) - k_2\, (y_2 - y_1)$$

$$m_3\, \ddot{y}_3 = F_3 - k_3\, (y_3 - y_2)$$

o bien

$$m_1\,\ddot{y}_1 + (k_1 + k_2)\,y_1 - k_2\,y_2 = F_1$$

$$m_2\,\ddot{y}_2 + (k_2 + k_3)\,y_2 - k_2\,y_1 - k_3\,y_3 = F_3$$

$$m_3\,\ddot{y}_3 + k_3\,y_3 - k_3\,y_2 = F_3$$

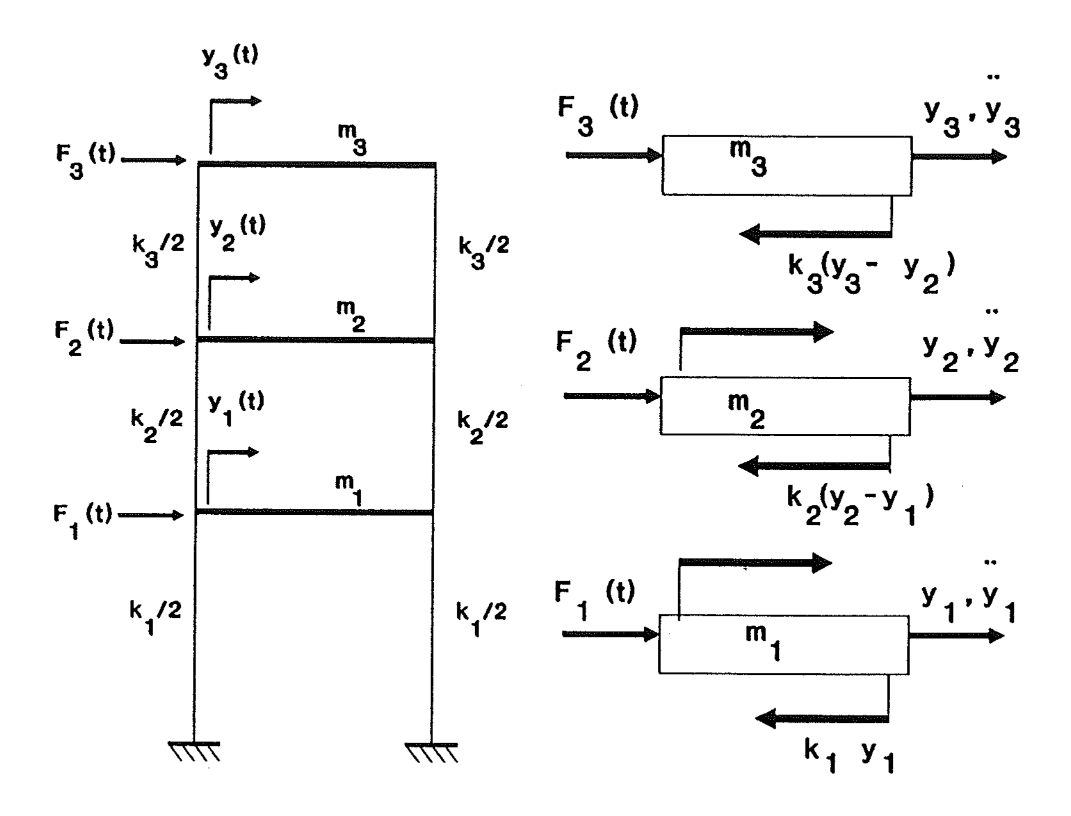


Fig.2.3.

De nuevo, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, que en forma matricial se escribe

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

A la vista de lo anterior se desprende que el número total de g.d.l. de un sistema dinámico será igual al producto del número de masas por el número de tipos diferentes de movimientos asociados a cada masa; y que por tanto, la ecuación (2.2-3) representa las ecuaciones de un sistema con N g.d.l.. En este caso las matrices son de dimensiones (N x N) y las de los vectores (N x 1). Debe observarse que las matrices son simétricas y su construcción es automática si se aplican las ideas del método directo de la rigidez.

2.3.- <u>SISTEMAS CON DOS GRADOS DE LIBERTAD</u>

Al igual que se hizo en el estudio de sistemas con un g.d.l., se comenzará resolviendo el problema correspondiente a un sistema sin amortiguamiento y en ausencia de solicitaciones exteriores.

Para ello se considerará un sistema con dos g.d.l.. En las Figuras 2.4. y 2.5., se representan dos modelos que permitirían estudiar el movimiento vertical y horizontal, respectivamente, de dos sistemas con dos g.d.l..

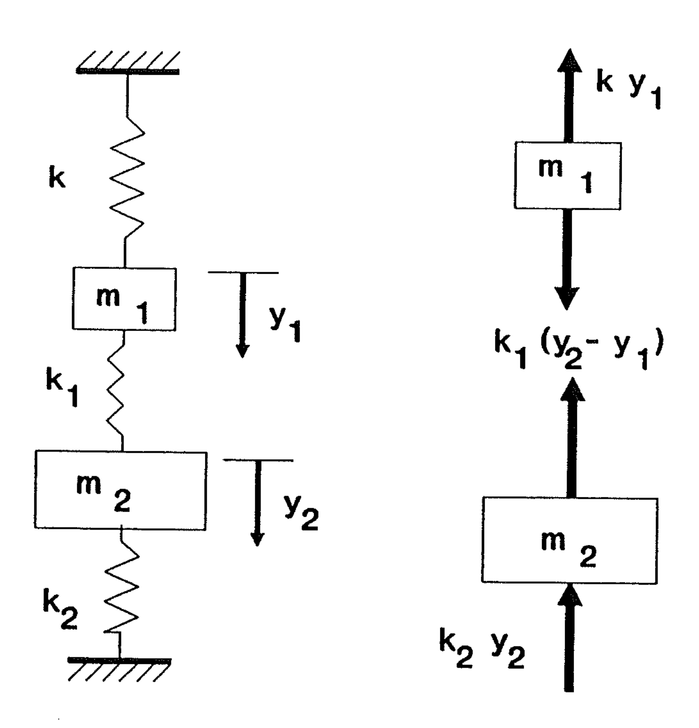


Fig. 2.4.

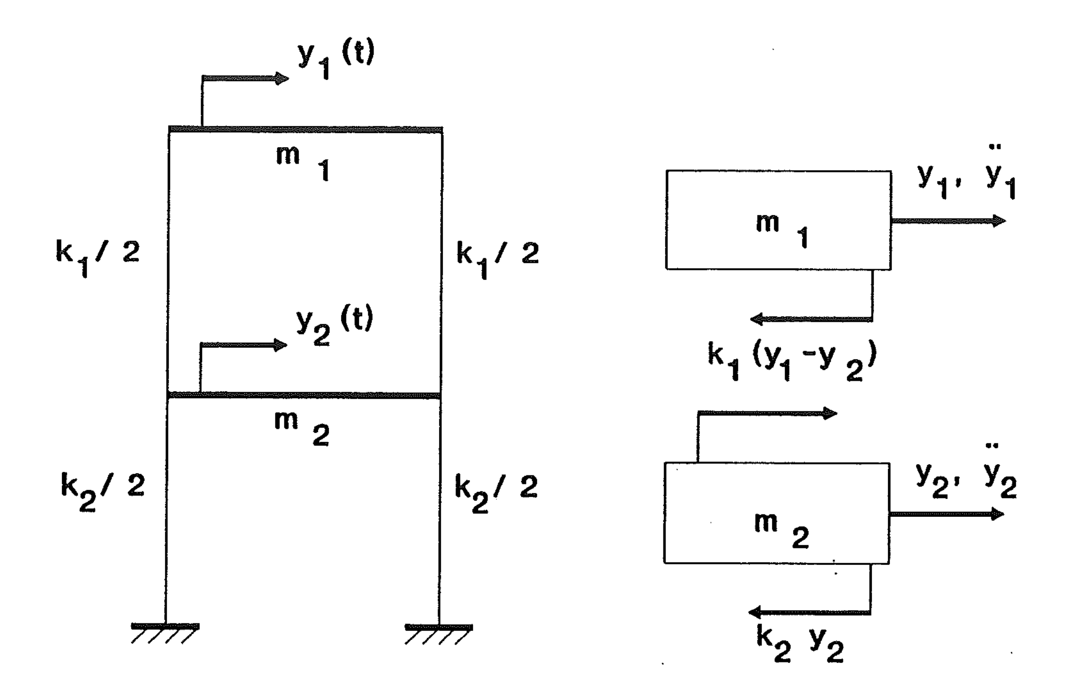


Fig. 2.5.

Si se hace **k** = **0**, en el modelo de la Figura 2.4.; las ecuaciones del movimiento, en ambos casos, serán

$$m_1 \ddot{y}_1 = - k_1 (y_1 - y_2)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = - k_2 y_2 + k_1 (y_1 - y_2)$$

o bien

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 (y_1 - y_2) = 0$$
$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 y_2 - k_1 (y_1 - y_2) = 0 \qquad (2.3\text{-}1)$$

y reordenando

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_1 y_2 = 0$$
$$m_2 \ddot{y}_2 - k_1 y_1 + (k_1 + k_2) y_2 = 0 \qquad (2.3\text{-}2)$$

Si se buscan soluciones del tipo

$$y_1 = \phi_1 \, e^{i\omega t}$$
$$y_2 = \phi_2 \, e^{i\omega t} \qquad (2.3\text{-}3)$$

entonces

$$\ddot{y}_1 = -\omega^2 \, \phi_1 \, e^{i\omega t}$$
$$\ddot{y}_2 = -\omega^2 \, \phi_2 \, e^{i\omega t} \qquad (2.3\text{-}4)$$

la sustitución de (2.3-3) y (2.3-4) en (2.3-2) proporciona al dividir por $e^{i\omega t}$

$$-\omega^2 \, \phi_1 \, m_1 + \phi_1 \, k_1 - \phi_2 \, k_1 = 0$$
$$-\omega^2 \, \phi_2 \, m_2 - \phi_1 \, k_1 + (k_1 + k_2) \, \phi_2 = 0 \qquad (2.3\text{-}5)$$

y reagrupando términos

$$\phi_1 \, [\, k_1 - \omega^2 \, m_1 \,] - \phi_2 \, k_1 = 0$$
$$\phi_2 \, [\, (k_1 + k_2) - \omega^2 \, m_2 \,] - \phi_1 \, k_1 = 0 \qquad (2.3\text{-}6)$$

las ecuaciones (2.3-6) también pueden escribirse en la forma

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{k_1}{k_1 - \omega^2 \, m_1} = \frac{(k_1 + k_2) - \omega^2 \, m_2}{k_1} \qquad (2.3\text{-}7)$$

lo que implica

$$k_1^2 = [\, k_1 - \omega^2 \, m_1 \,] \, [\, (k_1 + k_2) - \omega^2 \, m_2 \,] \qquad (2.3\text{-}8)$$

la expresión anterior representa una ecuación de segundo grado en ω^2

$$m_1 \, m_2 \, \omega^4 - [\, m_1 \, (k_1 + k_2) + m_2 \, k_1 \,] \, \omega^2 + k_1 \, k_2 = 0 \qquad (2.3\text{-}9)$$

cuyas soluciones son

$$\omega^2 = \frac{[\, m_1 \, (k_1 + k_2) + m_2 \, k_1 \,] \pm \sqrt{[\, m_1 \, (\, k_1 + k_2 \,) + k_1 \, m_2 \,]^2 - 4 k_1 k_2 \, m_1 m_2}}{2 \, m_1 \, m_2}$$

(2.3-10)

es decir

$$\omega^2 = \frac{[\, m_1 (k_1 + k_2) + m_2 k_1 \,] \pm \sqrt{[- m_1 (k_1 + k_2) + k_1 m_2]^2 + 4k_1^2 m_1 m_2}}{2 m_1 m_2} \tag{2.3-11}$$

como puede observarse la cantidad subradical es esencialmente positiva por lo que las dos raíces de ω^2, ($\omega_1^2 < \omega_2^2$), son reales, denominándose ***frecuencias propias del sistema***. La mas baja, ω_1, es la ***frecuencia fundamental*** y la siguiente, ω_2, ***primer armónico***.

Si por simplificar el ejercicio se toma

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = m \\ k_1 &= k \\ k_2 &= 2\,k \end{aligned} \tag{2.3-12}$$

la ecuación (2.3-11) se reduce a

$$\omega^2 = \frac{2k}{m} \pm \frac{\sqrt{8k^2m^2}}{m^2} = \frac{k}{m} (2 \pm \sqrt{2})$$

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k}{m} (2 - \sqrt{2}) \\ \omega_2^2 &= \frac{k}{m} (2 + \sqrt{2}) \end{aligned} \tag{2.3-13}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta las dos raíces de ω^2, la ecuación (2.3-7) puede escribirse como

$$\frac{\phi_1^i}{\phi_2^i} = \frac{k_1}{k_1 - \omega_i^2 m_1} = \frac{(k_1 + k_2) - \omega_i^2 m_2}{k_1} \tag{2.3-14}$$

o bien

$$\phi_2^i = \frac{k_1 - \omega_i^2 m_1}{k_1} \phi_1^i = (1 - \omega_i^2 \frac{m_1}{k_1}) \phi_1^i \tag{2.3-15}$$

como se ha tomado $\mathbf{m_1 = m}$ y $\mathbf{k_1 = k}$, (2.3-15) se transforma en

$$\phi_2^i = \left(1 - \omega_i^2 \frac{m}{k} \right) \phi_1^i \qquad (2.3\text{-}16)$$

si la componente $\phi_1{}^i$ se hace igual a la unidad, entonces

$$\begin{aligned} \phi_2^1 &= \left(1 - \frac{m}{k} \omega_1^2 \right) = -1 + \sqrt{2} \\ \phi_2^2 &= \left(1 - \frac{m}{k} \omega_2^2 \right) = -1 - \sqrt{2} \end{aligned} \qquad (2.3\text{-}17)$$

A los vectores

$$\underset{\sim}{\phi}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \; ; \; \underset{\sim}{\phi}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad (2.3\text{-}17b)$$

se les denomina ***MODOS DE VIBRACIÓN***. Puede observarse, Figura 2.6., que en el ***modo fundamental***, el movimiento de las dos masas se produce en el mismo sentido; mientras que en el ***segundo modo de vibración***, correspondiente al primer armónico, el movimiento está en oposición de fase.

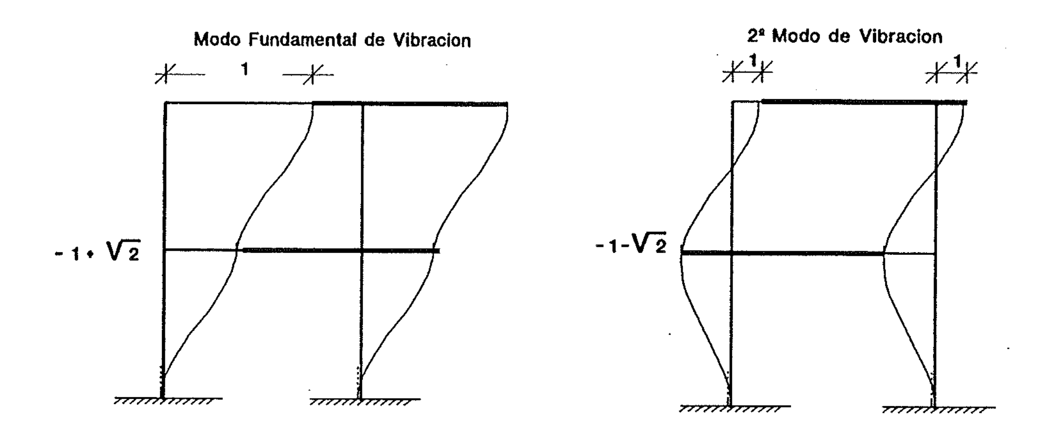


Fig. 2.6.

El planteamiento anterior también podría haberse realizado en forma matricial; en efecto, en esta forma la ecuación (2.3-2) puede escribirse como

$$\underset{\sim}{m}\ \ddot{\underset{\sim}{y}}(t) + \underset{\sim}{k}\ \underset{\sim}{y}(t) = \underset{\sim}{0} \qquad (2.3\text{-}18)$$

o lo que es igual

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.3\text{-}19)$$

y buscando soluciones del tipo

$$\underset{\sim}{y}(t) = \underset{\sim}{\phi}\ e^{i\omega t} \qquad (2.3\text{-}20)$$

se obtendría para el vector de aceleraciones

$$\ddot{\underset{\sim}{y}}\ (t) = -\omega^2\ \underset{\sim}{\phi}\ e^{i\omega t} \qquad (2.3\text{-}21)$$

la sustitución de (2.3-20) y (2.3-21) en (2.3-18) proporciona

$$-\omega^2\ \underset{\sim}{m}\ \underset{\sim}{\phi} + \underset{\sim}{k}\ \underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{0} \qquad (2.3\text{-}22)$$

o bien

$$(\underset{\sim}{k} - \omega^2\ \underset{\sim}{m})\ \underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{0} \qquad (2.3\text{-}23)$$

y para este caso concreto

$$\left[\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.3\text{-}24)$$

que también puede escribirse en la forma

$$\begin{bmatrix} k_1 - \omega^2\ m_1 & -k_1 \\ -k_1 & (\ k_1+k_2\ ) - \omega^2\ m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.3\text{-}25)$$

puesto que se trata de un sistema de ecuaciones homogéneo, la condición de existencia de una solución distinta de la trivial se obtendrá al igualar a cero el determinante de la matriz de coeficientes del sistema

$$\begin{vmatrix} k_1 - \omega^2 m_1 & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.3\text{-}26)$$

es decir

$$[\, k_1 - \omega^2 m_1 \,] \, [\, (k_1 + k_2) - \omega^2 m_2 \,] - k_1^2 = 0 \qquad (2.3\text{-}27)$$

que representa la misma condición expresada por la ecuación (2.3-8).

Una importante propiedad se obtiene al hacer los productos escalares de los vectores (2.3-17b), ponderados por la matriz de masa y rigidez. En efecto, si

$$\underset{\sim}{\phi} = \left[\underset{\sim}{\phi}^1 \;\; | \;\; \underset{\sim}{\phi}^2 \right] \; ; \; \underset{\sim}{\phi}^t = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\phi}^{1t} \\ -- \\ \underset{\sim}{\phi}^{2t} \end{bmatrix} \qquad (2.3\text{-}28)$$

estos productos escalares ponderados por la matriz de masa proporcionan

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{\phi}^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\phi}^{1t} \\ ---- \\ \underset{\sim}{\phi}^{2t} \end{bmatrix} \underset{\sim}{m} \left[\underset{\sim}{\phi}^1 \;\; | \;\; \underset{\sim}{\phi}^2 \right] = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\phi}^{1t} \underset{\sim}{m} \underset{\sim}{\phi}^1 & | & \underset{\sim}{\phi}^{1t} \underset{\sim}{m} \underset{\sim}{\phi}^2 \\ ------ & | & ------ \\ \underset{\sim}{\phi}^{2t} \underset{\sim}{m} \underset{\sim}{\phi}^1 & | & \underset{\sim}{\phi}^{2t} \underset{\sim}{m} \underset{\sim}{\phi}^2 \end{bmatrix}$$
(2.3-29)

de forma análoga para la matriz de rigidez, se obtendría

$$\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{\phi}^t \, \underset{\sim}{k} \, \underset{\sim}{\phi} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\phi}^{1t} \\ ---- \\ \underset{\sim}{\phi}^{2t} \end{bmatrix} \underset{\sim}{k} \left[\underset{\sim}{\phi}^1 \;\; | \;\; \underset{\sim}{\phi}^2 \right] = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\phi}^{1t} \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{\phi}^1 & | & \underset{\sim}{\phi}^{1t} \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{\phi}^2 \\ ------ & | & ------ \\ \underset{\sim}{\phi}^{2t} \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{\phi}^1 & | & \underset{\sim}{\phi}^{2t} \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{\phi}^2 \end{bmatrix}$$
(2.3-30)

Para este caso particular, teniendo en cuenta la simplificación realizada en (2.3-12), las matrices de rigidez y de masa tomarían la forma

$$\underset{\sim}{k} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} ; \; \underset{\sim}{m} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.3\text{-}31)$$

como

$$\underset{\sim}{\phi}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \; ; \; \underset{\sim}{\phi}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad (2.3\text{-}32)$$

entonces

$$\underset{\sim}{\phi}^{1t} = [1 \; ; \; -1+\sqrt{2}]$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad (2.3\text{-}33)$$
$$\underset{\sim}{\phi}^{1t} = [1 \; ; \; -1-\sqrt{2}]$$

o lo que es igual

$$\underset{\sim}{\phi} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ -1+\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} \end{array}\right] \; ; \; \underset{\sim}{\phi}^t = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1+\sqrt{2} \\ \hline 1 & -1-\sqrt{2} \end{array}\right]$$

(2.3-34)

si se realizan los productos

$$\underset{\sim}{\phi}^{1t}\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}^1 \qquad \underset{\sim}{\phi}^{1t}\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}^2$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad (2.3\text{-}35)$$
$$\underset{\sim}{\phi}^{2t}\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}^1 \qquad \underset{\sim}{\phi}^{2t}\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}^2$$

se obtendría

$$\underset{\sim}{\phi}^{1t}\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}^1 = [\,1 \quad -1+\sqrt{2}\,]\, m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} = 2m\,(2-\sqrt{2})$$

$$\underset{\sim}{\phi}^{1t}\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}^2 = [\,1 \quad -1+\sqrt{2}\,]\, m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} = 0$$

$$\underset{\sim}{\phi}^{2t}\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}^1 = [\,-1 \quad -1+\sqrt{2}\,]\, m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} = 0$$

$$\underset{\sim}{\phi}^{2t}\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}^2 = [\,-1 \quad -1+\sqrt{2}\,]\, m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} = 2m\,(2+\sqrt{2})$$

(2.3-36)

y para la matriz de rigidez

$$\underset{\sim}{\phi}^{1t}\,\underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{\phi}^{1} = \begin{bmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} = 4k\,(3-2\sqrt{2})$$

$$\underset{\sim}{\phi}^{1t}\,\underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{\phi}^{2} = \begin{bmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} = 0$$

$$\underset{\sim}{\phi}^{2t}\,\underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{\phi}^{1} = \begin{bmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} = 0$$

$$\underset{\sim}{\phi}^{2t}\,\underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{\phi}^{2} = \begin{bmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} = 4k\,(3+2\sqrt{2})$$

(2.3-37)

Los resultados obtenidos en (2.3-36) y (2.3-37) indican que, en estos particulares productos escalares *los modos de vibración son ortogonales respecto de la matriz de masa y rigidez*. Esta propiedad es muy útil, pues permite un cambio de coordenadas a la base $\underset{\sim}{\phi}$ que desacopla el sistema de ecuaciones diferenciales que caracteriza el comportamiento del sistema. En efecto, si se hace

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{\phi}\ \underset{\sim}{\xi} \qquad (2.3\text{-}38)$$

es decir

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ -- \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^{\,1} & | & \phi_1^{\,2} \\ ------ & | & ------ \\ \phi_2^{\,1} & | & \phi_2^{\,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ -- \\ \xi_2 \end{bmatrix} \qquad (2.3\text{-}39)$$

o bien

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ -- \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\phi}^{1} & | & \underset{\sim}{\phi}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ -- \\ \xi_2 \end{bmatrix} \qquad (2.3\text{-}40)$$

que también puede escribirse como

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{\phi}^1 \, \xi_1 + \underset{\sim}{\phi}^2 \, \xi_2 \qquad (2.3\text{-}41)$$

por lo que el vector de aceleraciones, quedaría

$$\ddot{\underset{\sim}{y}} = \underset{\sim}{\phi}^1 \, \ddot{\xi}_1 + \underset{\sim}{\phi}^2 \, \ddot{\xi}_2$$

sustituyendo (2.3-41) y (2.3-42) en (2.3-18), se obtiene

$$\underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^1 \, \ddot{\xi}_1 + \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^2 \, \ddot{\xi}_2 + \underset{\sim}{k} \, \underset{\sim}{\phi}^1 \, \xi_1 + \underset{\sim}{k} \, \underset{\sim}{\phi}^2 \, \xi_2 = 0 \qquad (2.3\text{-}42)$$

Premultiplicando (2.3-43) por $\underset{\sim}{\phi}^{1t}$ y haciendo uso de (2.3-36) y (2.3-37), se obtiene

$$(\underset{\sim}{\phi}^{1t} \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^1) \, \ddot{\xi}_1 + (\underset{\sim}{\phi}^{1t} \, \underset{\sim}{k} \, \underset{\sim}{\phi}^1) \, \xi_1 = 0 \qquad (2.3\text{-}44)$$

análogamente, premultiplicando (2.3-43) por $\underset{\sim}{\phi}^{2t}$

$$(\underset{\sim}{\phi}^{2t} \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^2) \, \ddot{\xi}_2 + (\underset{\sim}{\phi}^{2t} \, \underset{\sim}{k} \, \underset{\sim}{\phi}^2) \, \xi_2 = 0 \qquad (2.3\text{-}45)$$

Por otra parte, como, véase (2.3-22),

$$-\omega^2 \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi} + \underset{\sim}{k} \, \underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{0}$$

la premultiplicación de la expresión anterior por $\underset{\sim}{\phi}^{1t}$ y $\underset{\sim}{\phi}^{2t}$, proporciona

$$\begin{aligned} (\underset{\sim}{\phi}^{1t} \, \underset{\sim}{k} \, \underset{\sim}{\phi}^1) &= \omega_1^{\,2} \, (\underset{\sim}{\phi}^{1t} \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^1) \\ (\underset{\sim}{\phi}^{2t} \, \underset{\sim}{k} \, \underset{\sim}{\phi}^{2t}) &= \omega_2^{\,2} \, (\underset{\sim}{\phi}^{2t} \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^2) \end{aligned} \qquad (2.3\text{-}46)$$

en consecuencia, las expresiones (2.3-44) y (2.3-45), pueden escribirse en la forma

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2\, \xi_1 = 0$$
$$\ddot{\xi}_2 + \omega_2^2\, \xi_2 = 0 \qquad (2.3\text{-}47)$$

que son las ecuaciones tipo de sistemas con un g.d.l., cuya solución era

$$\xi_1 = A_1 \cos\,(\omega_1\, t) + B_1\, sen\,(\omega_1\, t)$$
$$\xi_2 = A_2 \cos\,(\omega_2\, t) + B_2\, sen\,(\omega_2\, t) \qquad (2.3\text{-}48)$$

sustituyendo (2.3-48) en (2.3-41), resulta

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ -- \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\phi}_1^{\,1} & | & \underset{\sim}{\phi}_1^{\,2} \\ ------ & | & ------ \\ \underset{\sim}{\phi}_2^{\,1} & | & \underset{\sim}{\phi}_2^{\,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \cos\,(\omega_1\, t) + B_1\, sen\,(\omega_1\, t) \\ ------------------ \\ A_2 \cos\,(\omega_2\, t) + B_2\, sen\,(\omega_2\, t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_1^1\,[\,A_1 \cos\,\omega_1\, t + B_1\, sen\,\omega_2\, t\,] + \phi_1^2\,[\,A_2 \cos\,\omega_2\, t + B_2\, sen\,\omega_2\, t\,] \\ ------------------------------------ \\ \phi_2^1\,[\,A_1 \cos\,\omega_1\, t + B_1\, sen\,\omega_2\, t\,] + \phi_2^2\,[\,A_2 \cos\,\omega_2\, t + B_2\, sen\,\omega_2\, t\,] \end{bmatrix}$$

(2.3-49)

las constantes A_1, B_1, A_2, B_2, se determinarán al imponer las condiciones iniciales en movimientos y velocidad.

Como

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{\xi} \quad ; \quad \dot{\underset{\sim}{y}} = \underset{\sim}{\phi}\, \dot{\underset{\sim}{\xi}} \qquad (2.3\text{-}50)$$

entonces, si $\underset{\sim}{y}_o$ *e* $\dot{\underset{\sim}{y}}_o$ representan las condiciones iniciales en movimientos y velocidad, se tendrá

$$\underset{\sim}{y}_o = \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{\xi}_o \quad ; \quad \dot{\underset{\sim}{y}}_o = \underset{\sim}{\phi}\, \dot{\underset{\sim}{\xi}}_o \qquad (2.3\text{-}51)$$

premultiplicando (2.3-51) por $\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{m}$

$$\begin{aligned} (\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{m})\, \underset{\sim}{y}_o &= (\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi})\, \underset{\sim}{\xi}_o \\ (\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{m})\, \dot{\underset{\sim}{y}}_o &= (\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi})\, \dot{\underset{\sim}{\xi}}_o \end{aligned} \tag{2.3-52}$$

por lo que es inmediato escribir

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\xi}_o &= \underset{\sim}{M}^{-1} (\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{m})\, \underset{\sim}{y}_o \\ \dot{\underset{\sim}{\xi}}_o &= \underset{\sim}{M}^{-1} (\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{m})\, \dot{\underset{\sim}{y}}_o \end{aligned} \tag{2.3-53}$$

siendo $\underset{\sim}{M}^{-1}$ la inversa de la matriz definida en (2.3-29).

En este ejemplo

$$\underset{\sim}{M} = 2m \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{\sim}{M}^{-1} = \frac{1}{4m} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

obteniéndose, para el producto $\underset{\sim}{M}^{-1} (\ \underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{m}\ )$

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{M}^{-1}\, \underset{\sim}{\phi}^t\, \underset{\sim}{m} &= \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ 1 & -\sqrt{2}-1 \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y si, por ejemplo, las condiciones iniciales son

$$\underset{\sim}{y}_o = \begin{bmatrix} y_{1\ (t=0)} \\ y_{2\ (t=0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \dot{\underset{\sim}{y}}_o = \begin{bmatrix} \dot{y}_{1\ (t=0)} \\ \dot{y}_{2\ (t=0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

teniendo en cuenta (2.3-53), se obtiene

$$\underset{\sim}{\xi_o} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\delta}{4} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\dot{\xi}_o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.3\text{-}54)$$

por otra parte, como

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \, sen\,(\omega_1 t)$$

$$\xi_2 = A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \, sen\,(\omega_2 t)$$

resulta:

$$\dot{\xi}_1 = \omega_1 \left(-A_1 \, sen\,(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t) \right)$$

$$\dot{\xi}_2 = \omega_2 \left(-A_2 \, sen\,(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) \right)$$

para t=0

$$\xi_{1\,(t=0)} = A_1$$

$$\xi_{2\,(t=0)} = A_2$$

$$\dot{\xi}_1 = \omega_1 B_1$$

$$\dot{\xi}_2 = \omega_2 B_2$$

es decir

$$\underset{\sim}{\xi_o} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \; ; \; \underset{\sim}{\dot{\xi}_o} = \begin{bmatrix} \omega_1 B_1 \\ \omega_2 B_2 \end{bmatrix} \qquad (2.3\text{-}55)$$

la identificación de la expresión anterior con (2.3-54), permite obtener

$$A_1 = \delta \frac{2+\sqrt{2}}{4} \; ; \; B_1 = 0$$

$$A_2 = \delta \frac{2-\sqrt{2}}{4} \; ; \; B_2 = 0$$

en consecuencia, de acuerdo con (2.3-48)

$$\xi_1 = \delta \, \frac{2+\sqrt{2}}{4} \cos \omega_1 t$$

$$\xi_2 = \delta \, \frac{2-\sqrt{2}}{4} \cos \omega_2 t$$

Por lo que, finalmente

$$y_1 = \frac{\delta}{4} \, [\, (2+\sqrt{2}) \cos \omega_1 t + (2-\sqrt{2}) \cos \omega_2 t \,]$$

$$y_2 = \frac{\delta \, \sqrt{2}}{4} \, [\, \cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t \,]$$

2.4.- FRECUENCIAS PROPIAS Y MODOS DE VIBRACIÓN

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (2.2.-3), que caracteriza el comportamiento dinámico de un sistema, se basa en las propiedades del problema de vibraciones libres, correspondiente al caso $\tilde{c} = \tilde{0}$, $\tilde{F} = \tilde{0}$, por lo que la ecuación resultante es la (2.3-18)

$$\tilde{m} \, \ddot{\tilde{y}}(t) + \tilde{k} \, \tilde{y}(t) = \tilde{0} \qquad (2.4\text{-}1)$$

donde, las dimensiones de las matrices, de rigidez y de masa, son (NxN), y las de los vectores de movimientos y aceleración (Nx1).

Con soluciones del tipo

$$\tilde{y}(t) = \tilde{\phi} \, e^{i\omega t} \qquad (2.4\text{-}2)$$

donde $\tilde{\phi}$ no depende del tiempo; se está representando un movimiento armónico de pulsación ω, tal que todos los puntos pasan simultáneamente por sus valores máximos y mínimos.

El vector de aceleraciones, se obtendría al derivar dos veces, con respecto al tiempo, (2.4-2)

$$\underset{\sim}{\ddot{y}}\,(t) = -\omega^2\,\underset{\sim}{\phi}\,e^{i\omega t} \tag{2.4-3}$$

la sustitución de (2.4-3) y (2.4-2) en (2.4-1) proporciona

$$-\omega^2\,\underset{\sim}{m}\,\underset{\sim}{\phi} + \underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{0} \tag{2.4-4}$$

o bien

$$(\underset{\sim}{k} - \omega^2\,\underset{\sim}{m})\,\underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{0} \tag{2.4-5}$$

Por otra parte la ecuación (2.4-5), podría escribirse también en la forma

$$\underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{\phi} = \omega^2\,\underset{\sim}{m}\,\underset{\sim}{\phi} \tag{2.4-6}$$

que representa un problema de autovalores generalizado. En efecto, si se premultiplica (2.4-6) por la inversa de la matriz de masa, y se designa por $\underset{\sim}{I}$ a la matriz identidad de orden N, se tendría

$$(\,\underset{\sim}{m}^{-1}\,\underset{\sim}{k}\,)\,\underset{\sim}{\phi} = \omega^2\,\underset{\sim}{I}\,\underset{\sim}{\phi} \tag{2.4-7}$$

o lo que es igual

$$[\,(\,\underset{\sim}{m}^{-1}\,\underset{\sim}{k}\,) - \omega^2\,\underset{\sim}{I}\,]\,\underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{0} \tag{2.4-8}$$

(2.4-8) corresponde a un problema de autovalores típico, donde ω^2 y $\underset{\sim}{\phi}$ son los autovalores y autovectores asociados a la matriz $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{m}^{-1}\,\underset{\sim}{k}$.

Los autovalores se obtienen al imponer la condición

$$\left| \underset{\sim}{k} - \omega^2 \underset{\sim}{m} \right| = 0 \qquad (2.4\text{-}9)$$

que es una ecuación de grado N en ω^2. Las N soluciones serán reales, puesto que $\underset{\sim}{k}$ y $\underset{\sim}{m}$ lo son. Estas N raíces

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < ... < \omega_N \qquad (2.4\text{-}10)$$

se ordenan de menor a mayor. La mas baja ω_1, se denomina frecuencia fundamental, y a las restantes primero, segundo, etc. armónicos.

Al sustituir cada valor de ω_i en (2.4-5) es posible determinar el autovector correspondiente $\underset{\sim}{\phi}^i$, tal que

$$\underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{\phi}^i = \omega_i^2\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}^i \qquad (2.4\text{-}11)$$

obteniéndose de esta forma los modos de vibración.

Debido al carácter homogéneo del sistema de ecuaciones (2.4-5), los modos están indeterminados por lo que se puede hacer la primera componente de cada modo, $\underset{\sim}{\phi}^i$, igual a la unidad, es decir

$$\phi_1^{\,i} = 1 \qquad (2.4\text{-}12)$$

aunque en otros caso se opta por normalizar el vector

$$\sum_{k=1}^{N} [\ \phi_k^{\,i}\ ]^2 = 1 \qquad (2.4\text{-}13)$$

o dividir las componentes por el valor máximo de las mismas. También, con objeto de simplificar las formulas, algunos autores patrocinan una normalización del tipo

$$\underset{\sim}{\phi}^{i\,t}\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}^i = 1 \qquad (2.4\text{-}14)$$

EJEMPLO 2.1

Obtener las frecuencias propias y modos de vibración del pórtico indicado en la Figura E.2.1-1. Los pilares se supondrán inextensibles y sin masa; los dinteles se considerarán infinitamente rígidos en relación a los pilares y con masas m, 1.5m y 2m.

Datos : $EI = 8 \times 10^6\ N \times m^2$; $m = 5000\ kg$; $L = 4\ m$

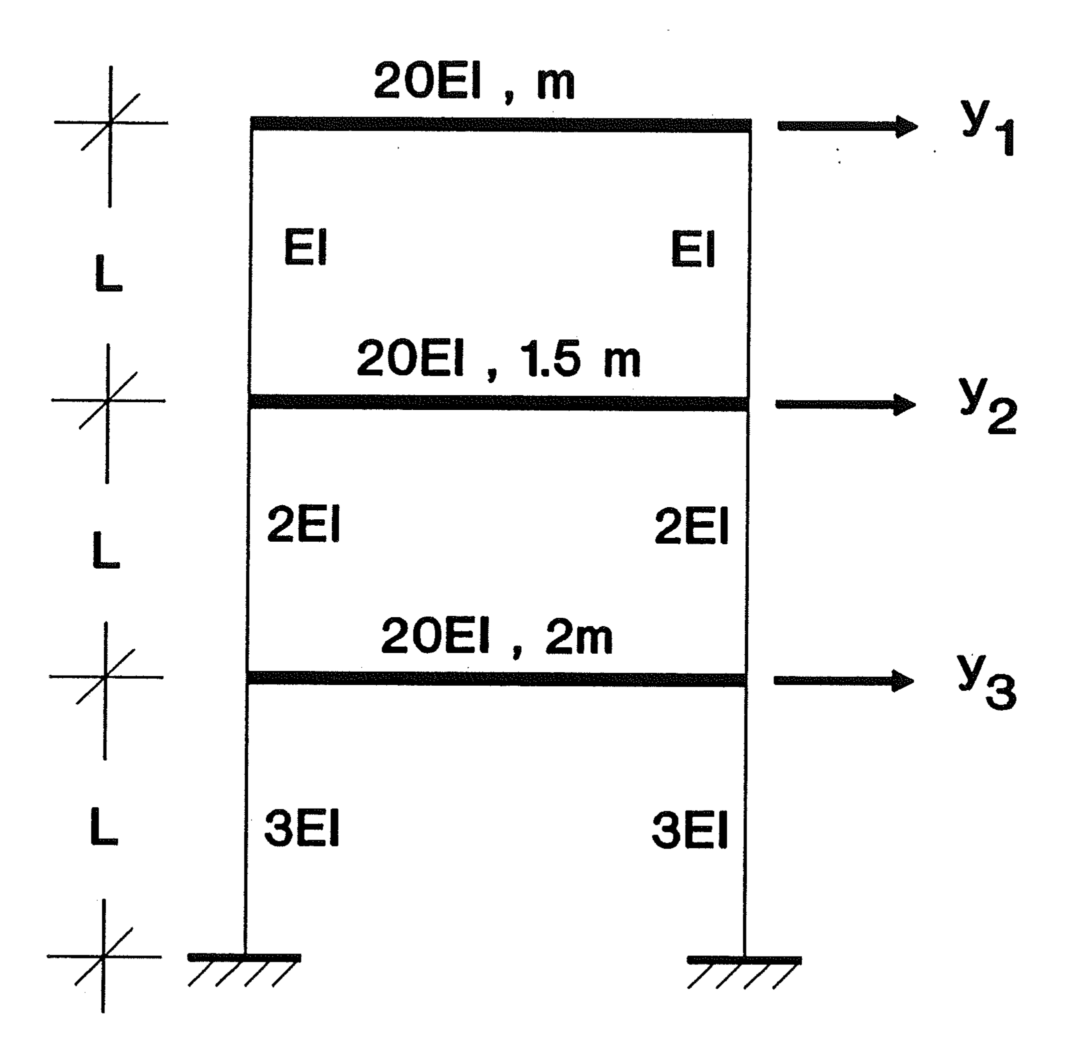


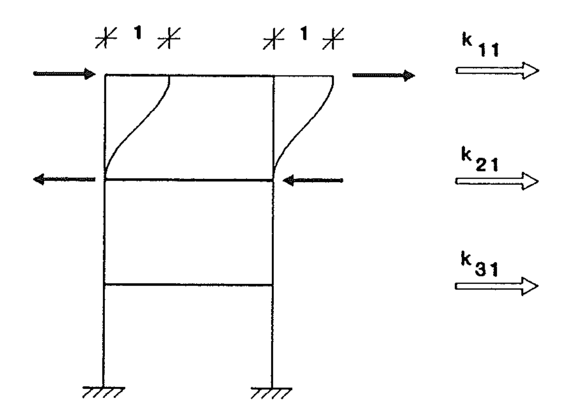
Fig. E.2.1-1

. . . .

Solución :

* La matriz de rigidez de la estructura, para los grados de libertad indicados se determinará teniendo en cuenta que *la columna i* son las *fuerzas que aparecen en los g.d.l. j* al dar *un desplazamiento unidad en el g.d.l. i, manteniendo impedidos el resto de los grados de libertad.* De este modo

- 1ª Columna : k_{j1} , j = 1, 2 y 3

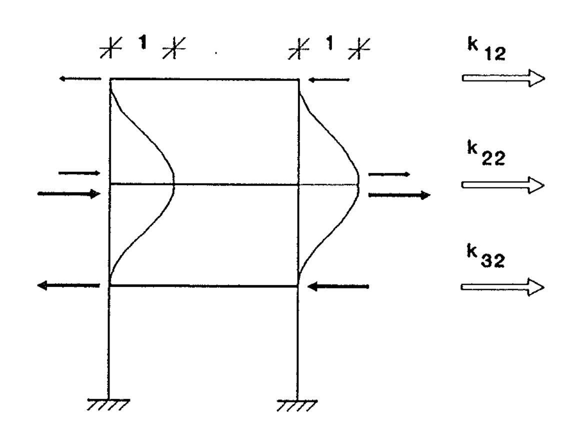


$$k_{11} = \frac{24EI}{L^3}$$

$$k_{21} = -\frac{24EI}{L^3}$$

$$k_{31} = 0$$

- 2ª Columna : k_{j2} , j = 1, 2 y 3

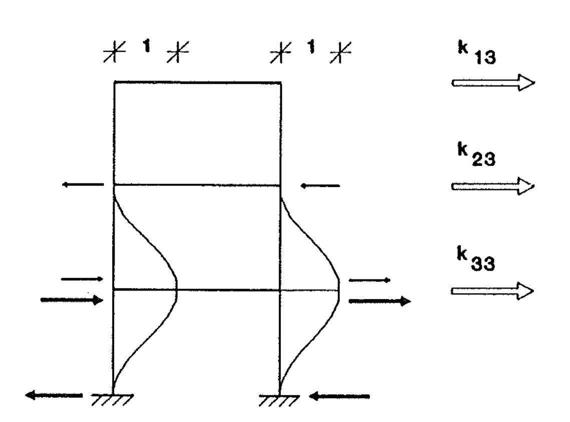


$$k_{12} = -\frac{24EI}{L^3}$$

$$k_{22} = \frac{24EI}{L^3} + \frac{24 \times 2EI}{L^3}$$

$$k_{32} = -\frac{24 \times 2EI}{L^3}$$

- 3ª Columna : k_{j3} , j = 1, 2 y 3

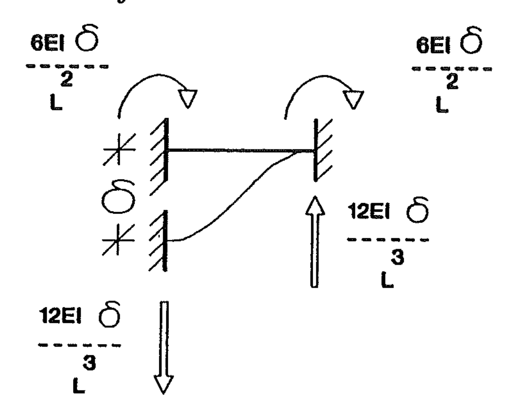


$$k_{13} = 0$$

$$k_{23} = -\frac{24 \times 2EI}{L^3}$$

$$k_{33} = \frac{24 \times 2EI}{L^3} + \frac{24 \times 3EI}{L^3}$$

NOTA : Obsérvese que los coeficientes han sido obtenidos teniendo en cuenta que



por tanto

$$\underset{\sim}{k} = \frac{24EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

siendo la matriz de masa

$$\underset{\sim}{m} = m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Las frecuencias propias se obtendrán al imponer la condición (2.4-9)

$$|\underset{\sim}{k} - \omega^2 \underset{\sim}{m}| = 0$$

que para este ejemplo se transforma en

$$\left| \frac{24EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} - \omega^2 m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = 0 \qquad \text{(E2.1-1)}$$

o bien al dividir por $24EI/L^3$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} - \omega^2 m \frac{L^3}{24EI} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = 0 \qquad \text{(E2.1-2)}$$

y si se designa por

$$\alpha = \omega^2 \, m \, \frac{L^3}{24EI} \tag{E2.1-3}$$

la condición (E2.1-2) puede expresarse como

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5\alpha & -2 \\ 0 & -2 & 5-2\alpha \end{vmatrix} = 0 \tag{E2.1-4}$$

que proporciona una ecuación cubica en α

$$\alpha^3 - 5.5\alpha^2 + 7.5\alpha - 2 = 0 \tag{E2.1-5}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.351 \\ \alpha_2 &= 1.608 \\ \alpha_3 &= 3.541 \end{aligned} \tag{E2.1-6}$$

entonces, segun (E2.1-3)

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{m} \, \frac{24EI}{L^3}$$

por lo que las frecuencias propias serán

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2.9024 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \; rd/seg \quad ; \quad T_1 = 0.433 \; seg \\ \omega_2 &= 6.2122 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \; rd/seg \quad ; \quad T_2 = 0.2023 \; seg \\ \omega_3 &= 9.2187 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \; rd/seg \quad ; \quad T_3 = 0.1363 \; seg \end{aligned} \tag{E2.1-7}$$

En lo que a los modos de vibración se refiere, éstos se obtendrán imponiendo la condición

$$(\underset{\sim}{k} - \omega_j^2 \underset{\sim}{m}) \underset{\sim}{\phi}^j = \underset{\sim}{0} \quad ; \quad j = 1, 2, 3$$

o lo que es igual

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha_j & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5\alpha_j & -2 \\ 0 & -2 & 5-2\alpha_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^j \\ \phi_2^j \\ \phi_3^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y haciendo la primera componente de cada modo igual a la unidad, es decir

$$\phi_1^j = 1 \rightarrow \phi_1^1 = \phi_1^2 = \phi_1^3 = 1$$

se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha_j & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5\alpha_j & -2 \\ 0 & -2 & 5-2\alpha_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_2^j \\ \phi_3^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de la primera de las ecuaciones

$$1 - \alpha_j = \phi_2^j$$

y de la tercera

$$2\ \phi_2^j = (5-2\alpha_j)\ \phi_3^j$$

por tanto

$$\phi_2^j = 1-\alpha_j$$

$$\phi_3^j = 2\ \frac{1-\alpha_j}{5-2\ \alpha_j}$$

en consecuencia, se tendrá

*** Primer Modo de Vibración**
T_1 = 0.433 seg

$\phi_1^1 = 1$

$\phi_2^1 = 0.649$

$\phi_3^1 = 0.302$

*** Segundo Modo de Vibración**
T_2 = 0.2023 seg

$\phi_1^2 = 1$

$\phi_2^2 = -0.608$

$\phi_3^2 = -0.682$

*** Tercer Modo de Vibración : T_3 = 0.1363 seg**

$\phi_1^3 = 1$

$\phi_2^3 = -2.541$

$\phi_3^3 = 2.441$

En la Figura E.2.1-2 se representan los tres modos de vibración, obtenidos al hacer la primera componente de cada modo igual a la unidad. Obsérvese que al estar los modos indeterminados cualquiera de las cuatro posibles configuraciones representadas en la Figura E.2.1-3 son también aceptables.

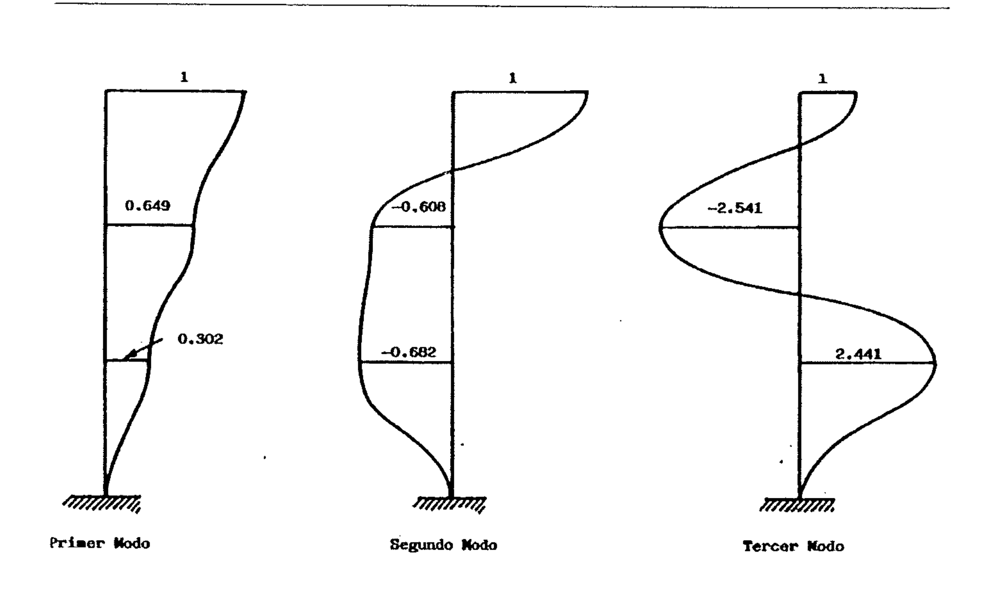


Fig. E.2.1-2

en consecuencia, los Modos de Vibración son

* **Primer Modo**	* **Segundo Modo**	* **Tercer Modo**
$T_1 = 0.433\,seg$	$T_2 = 0.2023\,seg$	$T_3 = 0.1363\,seg$
$\phi_1^1 = 1$	$\phi_1^2 = 1$	$\phi_1^3 = 1$
$\phi_2^1 = 0.649$	$\phi_2^2 = -0.608$	$\phi_2^3 = -2.541$
$\phi_3^1 = 0.302$	$\phi_3^2 = -0.682$	$\phi_3^3 = 2.441$

En la figura E.2.1-2, se representan los tres modos de vibración, obtenidos al hacer la primera componente de cada modo igual a la unidad. Obsérvese que, al estar los modos indeterminados, cualquiera de las cuatro posibles configuraciones representadas, para cada modo, en la Figura E.2.1-3 son también aceptables.

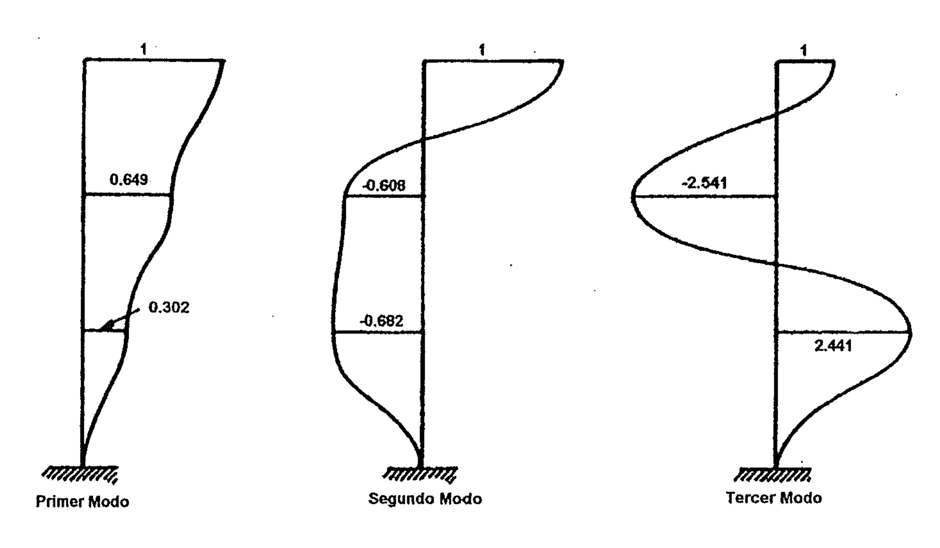


Fig. E.2.1-2

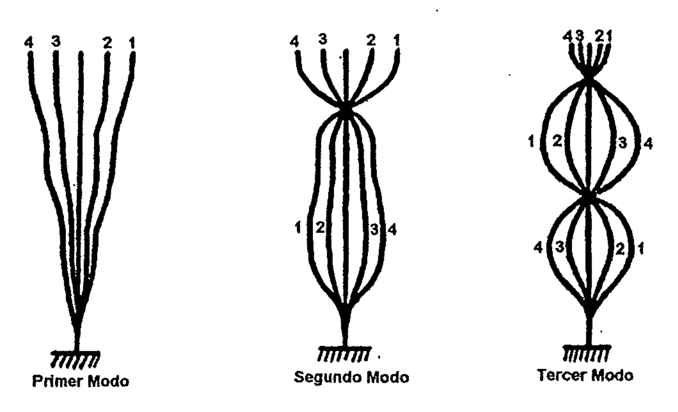


Fig. E.2.1-3

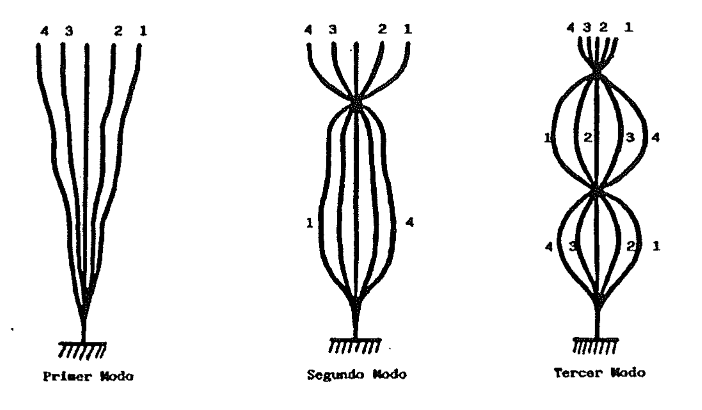


Fig. E.2.1-3

2.5.- PROPIEDADES DE LOS MODOS DE VIBRACIÓN

Como cada uno de los modos de vibración ha de cumplir la condición (2.4-6), es posible escribir para el modo j

$$\underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{\phi}^{j} = \omega_j^2\,\underset{\sim}{m}\,\underset{\sim}{\phi}^{j} \qquad (2.5\text{-}1)$$

Por otra parte como $\underset{\sim}{k}$ y $\underset{\sim}{m}$ son matrices simétricas se verificará

$$\underset{\sim}{m}^{t} = \underset{\sim}{m} \quad ; \quad \underset{\sim}{k}^{t} = \underset{\sim}{k} \qquad (2.5\text{-}2)$$

siendo entonces la traspuesta de (2.5-1)

$$(\underset{\sim}{\phi}^{j})^{t}\,\underset{\sim}{k} = \omega_i^2\,(\underset{\sim}{\phi}^{j})^{t}\,\underset{\sim}{m} \qquad (2.5\text{-}3)$$

Para una frecuencia $\omega_k \neq \omega_j$

$$\underset{\sim}{k}\ \underset{\sim}{\phi}^k = \omega_k^2\ \underset{\sim}{m}\ \underset{\sim}{\phi}^k \tag{2.5-4}$$

y post multiplicando (2.5-3) por $\underset{\sim}{\phi}^k$

$$(\underset{\sim}{\phi}^j)^t\ \underset{\sim}{k}\ \underset{\sim}{\phi}^k = \omega_j^2\ (\underset{\sim}{\phi}^j)^t\ \underset{\sim}{m}\ \underset{\sim}{\phi}^k \tag{2.5-5}$$

sustituyendo en la expresión anterior, $\underset{\sim}{k}\ \underset{\sim}{\phi}^k$, por su valor dado en (2.5-4), se obtiene

$$\omega_k^2\ (\underset{\sim}{\phi}^j)^t\ \underset{\sim}{m}\ \underset{\sim}{\phi}^k = \omega_j^2\ (\underset{\sim}{\phi}^j)^t\ \underset{\sim}{m}\ \underset{\sim}{\phi}^k \tag{2.5-6}$$

o lo que es igual

$$(\omega_k^2 - \omega_j^2)\ [\ (\underset{\sim}{\phi}^j)^t\ \underset{\sim}{m}\ \underset{\sim}{\phi}^k\ ] = 0 \tag{2.5-7}$$

y como $\omega_k \neq \omega_j$ resulta

$$(\underset{\sim}{\phi}^j)^t\ \underset{\sim}{m}\ \underset{\sim}{\phi}^k = 0 \tag{2.5-8}$$

Análogamente, la sustitución de, $\underset{\sim}{m}\ \underset{\sim}{\phi}^k$, por su valor dado en (2.5-4), en (2.5-5), permite escribir

$$\omega_k^2\ (\underset{\sim}{\phi}^j)^t\ \underset{\sim}{k}\ \underset{\sim}{\phi}^k = \omega_j^2\ (\underset{\sim}{\phi}^j)^t\ \underset{\sim}{k}\ \underset{\sim}{\phi}^k \tag{2.5-9}$$

es decir

$$(\omega_k^2 - \omega_j^2)\ [\ (\underset{\sim}{\phi}^j)^t\ \underset{\sim}{k}\ \underset{\sim}{\phi}^k\ ] = 0 \tag{2.5-10}$$

y como $\omega_k \neq \omega_j$ se obtiene

$$(\underset{\sim}{\phi}^j)^t \, \underset{\sim}{k} \, \underset{\sim}{\phi}^k = 0 \tag{2.5-11}$$

Si las matrices de masa y rigidez fuesen la matriz identidad de orden N, entonces

$$\underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{I} \quad ; \quad \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{I}$$

$$\Downarrow$$

$$(\underset{\sim}{\phi}^j)^t \, . \, \underset{\sim}{\phi}^k = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{\sim}{\phi}^j \perp \underset{\sim}{\phi}^k$$

en consecuencia (2.5-8) y (2.5-11), en este caso particular, expresan la condición clásica de ortogonalidad entre dos vectores. Siendo, por tanto, natural considerar a las expresiones

$$(\underset{\sim}{\phi}^j)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^k$$

$$(\underset{\sim}{\phi}^j)^t \, \underset{\sim}{k} \, \underset{\sim}{\phi}^k$$

como productos escalares generalizados, y afirmar, tal y como se apuntaba en el apartado 2.3, que en este producto escalar *los modos de vibración son ortogonales respecto de la matriz de masa y rigidez.*

En el caso en el que $\omega_k = \omega_j$; es decir, cuando $\mathbf{k} = \mathbf{j}$, los productos

$$(\underset{\sim}{\phi}^k)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^k$$

$$(\underset{\sim}{\phi}^k)^t \, \underset{\sim}{k} \, \underset{\sim}{\phi}^k$$

no se anulan; siendo habitual designar como masa modal al producto

$$M_k = (\underset{\sim}{\phi}^k)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^k \tag{2.5-12}$$

y normalizar los modos $\underset{\sim}{\phi}^k$ de manera que se cumplan la condición $\mathbf{M_k} = \mathbf{1}$, con lo que se simplifica algo la notación.

En resumen, las expresiones (2.5-8), (2.5-11) y (2.5-5) implican

$k \neq j$

$$(\tilde{\phi}^j)^t \, \tilde{m} \, \tilde{\phi}^k = 0$$

$$(\tilde{\phi}^j)^t \, \tilde{k} \, \tilde{\phi}^k = 0 \qquad (2.5\text{-}13)$$

$k = j$

$$(\tilde{\phi}^k)^t \, \tilde{k} \, \tilde{\phi}^k = \omega_k^2 \, M_k$$

Por último, y como consecuencia de lo anterior, cabe indicar que los productos

$$\tilde{\phi}^t \, \tilde{m} \, \tilde{\phi} \quad ; \quad \tilde{\phi}^t \, \tilde{k} \, \tilde{\phi}$$

son matrices diagonales que son designadas por

$$\tilde{M} = \tilde{\phi}^t \, \tilde{m} \, \tilde{\phi} \quad ; \quad \tilde{K} = \tilde{\phi}^t \, \tilde{k} \, \tilde{\phi} \qquad (2.5\text{-}14)$$

siendo

$$\tilde{\phi} = \left[\tilde{\phi}^1 \mid \tilde{\phi}^2 \mid \ldots \mid \tilde{\phi}^N \right] = \begin{bmatrix} \phi_1^1 & \phi_1^2 & \ldots & \phi_1^N \\ \phi_2^1 & \phi_2^2 & \ldots & \phi_2^N \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \phi_N^1 & \phi_N^2 & \ldots & \phi_N^N \end{bmatrix} \qquad (2.5\text{-}15)$$

la denominada *matriz modal*, cuyas columnas son los modos de vibración.

Así pues

$$M_{ik} = (\tilde{\phi}^i)^t \, \tilde{m} \, \tilde{\phi}^k = \left[\begin{array}{l} 0 \; ; \; \forall \, i \neq k \\ M_i \; ; \; \forall \, i = k \end{array} \right. \qquad (2.5\text{-}16)$$

$$K_{ik} = (\tilde{\phi}^i)^t \, \tilde{k} \, \tilde{\phi}^k = \left[\begin{array}{r} 0 \; ; \; \forall \, i \neq k \\ \omega_i^2 \, M_i \; ; \; \forall \, i = k \end{array} \right. \qquad (2.5\text{-}17)$$

2.6.- EL MÉTODO DE LOS MODOS NORMALES

Aprovechando las propiedades de ortogonalidad de los modos y puesto que éstos son soluciones del sistema homogéneo surge la idea de utilizar una combinación de los mismos para calcular la solución general. En otras palabras, se propone calcular ésta mediante la combinación lineal

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{\phi}^1\, \xi_1 + \underset{\sim}{\phi}^2\, \xi_2 + \dots + \underset{\sim}{\phi}^N\, \xi_N \qquad (2.6\text{-}1)$$

lo que indica claramente un cambio de coordenadas a la base modal. En estas condiciones la ecuación (2.4-1) se transforma en

$$\underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}\, \ddot{\underset{\sim}{\xi}} + \underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{0} \qquad (2.6\text{-}2)$$

Premultiplicando (2.6-2) por $\underset{\sim}{\phi}^t$, se obtiene

$$(\underset{\sim}{\phi}^t\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi})\, \ddot{\underset{\sim}{\xi}} + (\underset{\sim}{\phi}^t\, \underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{\phi})\, \underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{0} \qquad (2.6\text{-}3)$$

teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de los modos y (2.5-14), la expresión anterior toma la forma

$$\underset{\sim}{M}\, \ddot{\underset{\sim}{\xi}} + \underset{\sim}{K}\, \underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{0} \qquad (2.6\text{-}4)$$

al ser las matrices $\underset{\sim}{M}$ y $\underset{\sim}{K}$ diagonales, véase (2.5-16) y (2.5-17), el sistema (2.6-3) representa N ecuaciones diferenciales correspondientes a un sistema con un g.d.l..

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & M_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \\ \dots \\ \ddot{\xi}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2\, M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2\, M_2 & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^2\, M_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2.6-5)

Es decir, la resolución del sistema de N ecuaciones diferenciales acopladas, se ha transformado en el análisis de N ecuaciones diferenciales del tipo

$$\ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \, \xi_k = 0 \qquad (2.6\text{-}6)$$

que son las ecuaciones tipo de sistemas con un g.d.l., cuya solución es

$$\xi_k = A_k \cos\,(\omega_k\, t) + B_k\, sen\,(\omega_k\, t) \qquad (2.6\text{-}7)$$

las constantes A_k y B_k, se determinarán al imponer las condiciones iniciales en movimientos y velocidad.

Tal y como se comentó en el apartado 2.3, si $\underset{\sim}{y}_o$ e $\underset{\sim}{\dot{y}}_o$ representan las condiciones iniciales en movimientos y velocidad, se tendrá

$$\underset{\sim}{y}_o = \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{\xi}_o \;\; ; \;\; \underset{\sim}{\dot{y}}_o = \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{\dot{\xi}}_o \qquad (2.6\text{-}8)$$

premultiplicando (2.6-7) por $\underset{\sim}{\phi}^t \, \underset{\sim}{m}$

$$\begin{aligned} (\underset{\sim}{\phi}^t \, \underset{\sim}{m})\, \underset{\sim}{y}_o &= (\underset{\sim}{\phi}^t \, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi})\, \underset{\sim}{\xi}_o \\ (\underset{\sim}{\phi}^t \, \underset{\sim}{m})\, \underset{\sim}{\dot{y}}_o &= (\underset{\sim}{\phi}^t \, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi})\, \underset{\sim}{\dot{\xi}}_o \end{aligned} \qquad (2.6\text{-}9)$$

por lo que es inmediato escribir

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\xi}_o &= \underset{\sim}{M}^{-1}\, (\underset{\sim}{\phi}^t \, \underset{\sim}{m})\, \underset{\sim}{y}_o \\ \underset{\sim}{\dot{\xi}}_o &= \underset{\sim}{M}^{-1}\, (\underset{\sim}{\phi}^t \, \underset{\sim}{m})\, \underset{\sim}{\dot{y}}_o \end{aligned} \qquad (2.6\text{-}10)$$

siendo $\underset{\sim}{M}^{-1}$ la inversa de la matriz definida en (2.5-16); es decir

$$\underset{\sim}{\xi}_o = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{M_N} \end{bmatrix} \underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{m} \underset{\sim}{y}_o \qquad (2.6\text{-}11)$$

$$\underset{\sim}{\dot{\xi}}_o = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{M_N} \end{bmatrix} \underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{m} \underset{\sim}{\dot{y}}_o \qquad (2.6\text{-}12)$$

conociendo los valores de $\underset{\sim}{\xi}_o$ y $\underset{\sim}{\dot{\xi}}_o$, es inmediato obtener las constantes A_k y B_k, ya que, para t=0

$$(\xi_k)_o = A_k$$
$$(\dot{\xi}_k)_o = \omega_k B_k \qquad (2.6\text{-}13)$$

por lo que finalmente

$$\xi_k = (\xi_k)_o \cos(\omega_k t) + \frac{(\dot{\xi}_k)_o}{\omega_k} sen(\omega_k t) \qquad (2.6\text{-}14)$$

2.7.- VIBRACIONES FORZADAS

En este apartado se aplica el método de los Modos Normales al sistema

$$\underset{\sim}{m} \underset{\sim}{\ddot{y}} + \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{F} \qquad (2.7\text{-}1)$$

donde $\underset{\sim}{F}(t)$ es el vector de fuerzas en los grados de libertad al discretizar la estructura. Utilizando el cambio de base

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{\xi} \quad ; \quad \underset{\sim}{\ddot{y}} = \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{\ddot{\xi}} \qquad (2.7\text{-}2)$$

(2.7-1) se transforma en

$$\underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{\ddot{\xi}} + \underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{F} \qquad (2.7\text{-}3)$$

premultiplicando (2.7-3) por $\underset{\sim}{\phi}^t$, se obtiene

$$(\underset{\sim}{\phi}^t\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi})\, \underset{\sim}{\ddot{\xi}} + (\underset{\sim}{\phi}^t\, \underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{\phi})\, \underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{\phi}^t\, \underset{\sim}{F} \qquad (2.7\text{-}4)$$

y como

$$(\underset{\sim}{\phi}^i)^t\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}^k = \begin{cases} 0 \;;\; \forall\, i \neq k \\ M_i \;;\; \forall\, i = k \end{cases}$$

$$(\underset{\sim}{\phi}^i)^t\, \underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{\phi}^k = \begin{cases} 0 \;;\; \forall\, i \neq k \\ \omega_i^2\, M_i \;;\; \forall\, i = k \end{cases}$$

la ecuación (2.7-4) puede escribirse

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2\, \xi_i = \frac{(\underset{\sim}{\phi}^i)^t\, \underset{\sim}{F}}{M_i} \qquad (2.7\text{-}5)$$

ecuación análoga a la obtenida en apartados previos, salvo que en el segundo miembro aparece *la proyección del vector de cargas sobre el modo de vibración i.* Para poner de manifiesto la simetría del proceso de proyección, en ocasiones suele escribirse el segundo miembro de (2.7-5) en la forma

$$\frac{(\underset{\sim}{\phi}^i)^t\, \underset{\sim}{F}}{M_i} = \frac{(\underset{\sim}{\phi}^i)^t\, \underset{\sim}{F}}{(\underset{\sim}{\phi}^i)^t\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}^i} \qquad (2.7\text{-}6)$$

La solución de (2.7-5) se calcula en la forma habitual para sistemas con un g.d.l., es decir

$$\xi_i = A_i \cos(\omega_i t) + B_i \, sen(\omega_i t) + \xi_i^p \tag{2.7-7}$$

donde $\xi^p{}_i$ es la solución particular de la ecuación (2.7-5), que puede obtenerse por cualquiera de los procedimientos indicados en el Capitulo I (vg.: la integral de Duhamel).

Las constantes A_i y B_i, se determinarán a partir de las condiciones iniciales $(\xi_j)_o$ y $(\dot{\xi}_j)_o$, definidas en (2.6-13); en efecto para t=0 (2.7-7) proporciona

$$(\xi_i)_o = \xi_i(t=0) = A_i + (\xi_i^p)_o \tag{2.7-8}$$

y como

$$\dot{\xi}_i = \omega_i [-A_i \, sen(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)] + \dot{\xi}_i^p \tag{2.7-9}$$

se obtiene

$$(\dot{\xi}_i)_o = \dot{\xi}_i(t=0) = \omega_i B_i + (\dot{\xi}_i^p)_o \tag{2.7-10}$$

2.8.- RESPUESTA DE SISTEMAS AMORTIGUADOS

En este caso la ecuación que caracteriza el comportamiento del sistema es

$$\underset{\sim}{m} \ddot{\underset{\sim}{y}} + \underset{\sim}{c} \dot{\underset{\sim}{y}} + \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{F} \tag{2.8-1}$$

y realizando el cambio de base

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{\xi} \quad ; \quad \dot{\underset{\sim}{y}} = \underset{\sim}{\phi} \dot{\underset{\sim}{\xi}} \quad ; \quad \ddot{\underset{\sim}{y}} = \underset{\sim}{\phi} \ddot{\underset{\sim}{\xi}} \tag{2.8-2}$$

(2.8-1) se transforma en

$$\underset{\sim}{m} \underset{\sim}{\phi} \ddot{\underset{\sim}{\xi}} + \underset{\sim}{c} \underset{\sim}{\phi} \dot{\underset{\sim}{\xi}} + \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{F} \tag{2.8-3}$$

premultiplicando (2.7-3) por $\underset{\sim}{\phi}^t$, se obtiene

$$(\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{m} \underset{\sim}{\phi}) \ddot{\underset{\sim}{\xi}} + (\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{c} \underset{\sim}{\phi}) \dot{\underset{\sim}{\xi}} + (\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{\phi}) \underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{F} \qquad (2.8\text{-}4)$$

mientras que $(\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{m} \underset{\sim}{\phi})$ y $(\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{\phi})$ son matrices diagonales; no existe, sin embargo, ninguna condición sobre el término $(\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{c} \underset{\sim}{\phi})$, por lo que el desacoplamiento no es total. Para conseguirlo es preciso añadir alguna hipótesis sobre la matriz de amortiguamiento, siendo la mas inmediata la denominada ***amortiguamiento proporcional***, es decir

$$\underset{\sim}{c} = \alpha \underset{\sim}{m} + \beta \underset{\sim}{k} \qquad (2.8\text{-}5)$$

donde α y β son parámetros que dependen del tipo de estructura por lo que deberán fijarse para cada caso particular. Con la hipótesis previa, premultiplicando (2.8-5) por $\underset{\sim}{\phi}^t$ y postmultiplicando por $\underset{\sim}{\phi}$, puede escribirse

$$\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{c} \underset{\sim}{\phi} = \alpha (\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{m} \underset{\sim}{\phi}) + \beta (\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{\phi}) \qquad (2.8\text{-}6)$$

o lo que es igual

$$\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{c} \underset{\sim}{\phi} = \alpha \underset{\sim}{M} + \beta \underset{\sim}{K} \qquad (2.8\text{-}7)$$

y al ser $\underset{\sim}{M}$ y $\underset{\sim}{K}$, matrices diagonales $(\underset{\sim}{\phi}^t \underset{\sim}{c} \underset{\sim}{\phi})$ también lo será; pudiendo escribir para la ecuación i-esima

$$M_i \ddot{\xi}_i + (\alpha M_i + \beta \omega_i^2 M_i) \dot{\xi}_i + \omega_i^2 M_i \xi_i = (\underset{\sim}{\phi}^i)^t \underset{\sim}{F} \qquad (2.8\text{-}8)$$

y dividiendo por M_i

$$\ddot{\xi}_i + (\alpha + \beta \omega_i^2) \dot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = \frac{(\underset{\sim}{\phi}^i)^t \underset{\sim}{F}}{M_i} \qquad (2.8\text{-}9)$$

y si se hace

$$2\zeta_i\omega_i = \alpha + \beta\omega_i^2 \tag{2.8-10}$$

donde

$$\zeta_i = \frac{c_i}{c_{i_{crit}}} \tag{2.8-11}$$

la ecuación (2.8-9) toma la forma

$$\ddot{\xi}_i + 2\zeta_i\omega_i\,\dot{\xi}_i + \omega_i^2\,\xi_i = \frac{(\underset{\sim}{\phi}^i)^t\,\underset{\sim}{F}}{M_i} \tag{2.8-12}$$

La relación (2.8-10) puede utilizarse para obtener α y β, cuando se conocen los índices de amortiguamiento para dos modos cualesquiera. Así, por ejemplo, si se conocen los índices de amortiguamiento para los dos primeros modos, ζ_1 y ζ_2

$$\begin{aligned} 2\zeta_1\omega_1 &= \alpha + \beta\omega_1^2 \\ 2\zeta_2\omega_2 &= \alpha + \beta\omega_2^2 \end{aligned} \tag{2.8-13}$$

que representa un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, α y β

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\omega_1\omega_2\,\frac{\zeta_1\omega_2 - \zeta_2\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \\ \beta &= 2\,\frac{\zeta_2\omega_2 - \zeta_1\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \end{aligned} \tag{2.8-14}$$

obtenidos los valores de α y β, el índice de amortiguamiento para un modo cualquiera i, se obtendrá teniendo en cuenta (2.8-10)

$$\zeta_i = \frac{\alpha + \beta\omega_i^2}{2\omega_i} \tag{2.8-15}$$

para el caso particular $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$

$$\alpha = 2\zeta \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \qquad \beta = 2\zeta \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \tag{2.8-16}$$

La solución de (2.8-) se reduce, de nuevo, al caso del sistema con un g.d.l.

$$\xi_i = A_i \cos(\omega_{i_d} t) + B_i \, sen \, (\omega_{i_d} t) + \xi_i^p \tag{2.8-17}$$

donde

$$\omega_{d_i} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \tag{2.8-18}$$

y $\xi^p{}_i$ es una solución particular que debe calcularse para cada grado de libertad. Las condiciones iniciales permiten, a su vez determinar los valores de las constantes A_i y B_i.

2.9.- MOVIMIENTO EN LA BASE. VECTOR DE ARRASTRE. FACTOR DE PARTICIPACIÓN

Un caso importante de carga es el originado por un movimiento de la base; por ejemplo, el producido por un terremoto

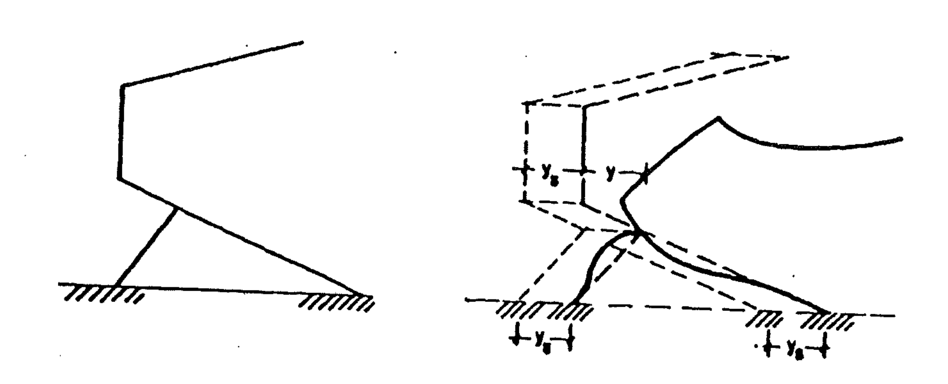


Fig. 2.7.

La carga total que actúa en cada grado de libertad puede obtenerse generalizando, la situación expuesta en el Capitulo I para sistemas con un g.d.l., al caso de sistemas con N g.d.l. cuya unión con el suelo sufre un desplazamiento y_s (t).

El movimiento total

$$\tilde{y}^T(t) = y_s(t)\, \tilde{J} + \tilde{y}(t) \qquad (2.9\text{-}1)$$

se compone de

* uno de arrastre

$$y_s(t)\, \tilde{J} \qquad (2.9\text{-}2)$$

* otro relativo

$$\tilde{y}(t) \qquad (2.9\text{-}3)$$

donde $\tilde{J}$ es el denominado ***VECTOR DE ARRASTRE*** que *indica los grados de libertad afectados por el movimiento de solido rígido.*

La Figura 2.8. recoge los vectores de influencia para una estructura simple formada por barras y con g.d.l. de traslación

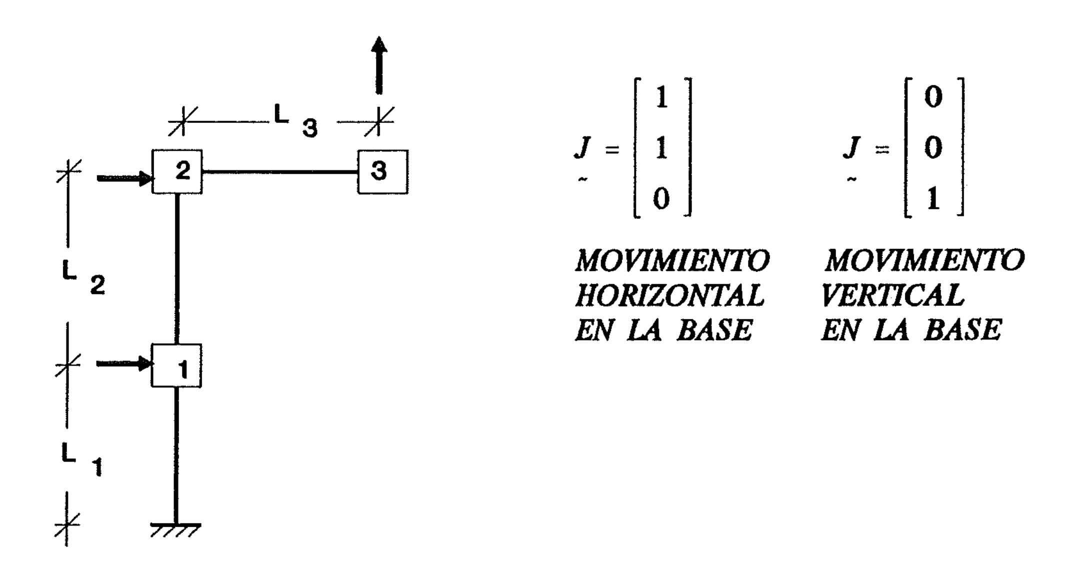


Fig. 2.8.

Con estas consideraciones la ecuación del movimiento es

$$\underset{\sim}{m}\, \ddot{\underset{\sim}{y}}^T + \underset{\sim}{c}\, \dot{\underset{\sim}{y}} + \underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{F} \tag{2.9-4}$$

y teniendo en cuenta (2.9-1)

$$\underset{\sim}{m}\, \ddot{\underset{\sim}{y}} + \underset{\sim}{c}\, \dot{\underset{\sim}{y}} + \underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{y} = -\underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{J}\, \ddot{y}_s(t) \tag{2.9-5}$$

la ecuación anterior es semejante a la (2.8-1) si se hace

$$\underset{\sim}{F} = -\underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{J}\, \ddot{y}_s(t) \tag{2.9-6}$$

surgiendo la fuerza, en este caso, por efecto de la inercia provocada ante el movimiento en la base.

Utilizando la transformación

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{\xi} \quad ; \quad \dot{\underset{\sim}{y}} = \underset{\sim}{\phi}\, \dot{\underset{\sim}{\xi}} \quad ; \quad \ddot{\underset{\sim}{y}} = \underset{\sim}{\phi}\, \ddot{\underset{\sim}{\xi}}$$

la ecuación (2.9-6) puede escribirse en la forma

$$\ddot{\xi}_i + 2\zeta_i \omega_i\, \dot{\xi}_i + \omega_i^2\, \xi_i = -\frac{(\underset{\sim}{\phi}^i)^t\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{J}}{(\underset{\sim}{\phi}^i)^t\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}^i}\, \ddot{y}_s(t) \tag{2.9-7}$$

es decir; el estudio del sistema con N g.d.l. se reduce de, esta forma, al de N sistemas con un g.d.l. y cargas

$$F_i(t) = -\,\Gamma_i\, \ddot{y}_s(t) \tag{2.9-8}$$

donde

$$\Gamma_i = \frac{(\underset{\sim}{\phi}^i)^t\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{J}}{(\underset{\sim}{\phi}^i)^t\, \underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\phi}^i} \tag{2.9-9}$$

es el denominado ***FACTOR DE PARTICIPACIÓN*** ya que puede utilizarse como *criterio para analizar la importancia relativa de los modos de vibración en la superposición final.*

El significado de este factor, se obtiene al desarrollar el vector de influencia $\underset{\sim}{J}$ en función de los modos. En efecto; supóngase que $\underset{\sim}{J}$ puede escribirse en la forma

$$\underset{\sim}{J} = \sum_{k=1}^{N} C_k \, \underset{\sim}{\phi}^k \qquad (2.9\text{-}10)$$

sustituyendo (2.9-10) en (2.9-9)

$$\Gamma_i = \frac{\sum_{k=1}^{N} \left[(\underset{\sim}{\phi}^i)^t \, \underset{\sim}{m} \, C_k \, \underset{\sim}{\phi}^k \right]}{(\underset{\sim}{\phi}^i)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^i} \qquad (2.9\text{-}11)$$

recordando ahora la propiedad de ortogonalidad de los modos respecto de la matriz de masa

$$(\underset{\sim}{\phi}^i)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^k = 0 \; ; \; \forall \, k \neq i$$

la expresión (2.9-11) se simplifica

$$\Gamma_i = C_i \, \frac{(\underset{\sim}{\phi}^i)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^i}{(\underset{\sim}{\phi}^i)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^i} \qquad (2.9\text{-}12)$$

o lo que es igual

$$\Gamma_i = C_i \qquad (2.9\text{-}13)$$

por lo que (2.9-10) puede escribirse

$$\underset{\sim}{J} = \sum_{k=1}^{N} \Gamma_i \, \underset{\sim}{\phi}^i \qquad (2.9\text{-}14)$$

lo que pone de manifiesto que el factor de participación expresa la *contribución de cada modo al movimiento de arrastre.*

2.10.- ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL

Este procedimiento es uno de los más utilizados en el cálculo sísmico de estructuras. Las hipótesis fundamentales que se realizan son las siguientes :

* El *movimiento del suelo*, que se aplica a todos los soportes simultáneamente, *se define en forma de Espectro de Respuesta.*

* El *comportamiento* de la estructura *es lineal*, y por tanto se puede utilizar la superposición de modos.

El método consiste en la obtención de las frecuencias propias y modos de vibración (resolución del problema de autovalores) y en el cálculo de la respuesta máxima de cada modo de acuerdo con el espectro de respuesta elegido.

Recordando que la solución de un sistema con un g.d.l. caracterizado por la ecuación del tipo

$$m\ \ddot{y}(t) + c\ \dot{y}(t) + k\ y(t) = -m\ \ddot{y}_s(t) \qquad (2.10\text{-}1)$$

o bien

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega\ \dot{y}(t) + \omega^2\ y(t) = -\ \ddot{y}_s(t) \qquad (2.10\text{-}2)$$

podía escribirse en la forma

$$y(t) = -\frac{1}{\omega_d}\int_0^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\ \ddot{y}_s(\tau)\ sen\ \omega_d\ (t-\tau)\ d\tau \qquad (2.10\text{-}3)$$

comparando (2.10-2) con

$$\ddot{\xi}_i + 2\zeta_i\omega_i\ \dot{\xi}_i + \omega_i^2\ \xi_i = -\ \Gamma_i\ \ddot{y}_s(t) \qquad (2.10\text{-}4)$$

y teniendo en cuenta (2.10-3), se obtiene para ξ_i

$$\xi_i(t) = -\ \frac{\Gamma_i}{\omega_{d_i}}\int_0^t e^{-\zeta_i\omega_i(t-\tau)}\ \ddot{y}_s(\tau)\ sen\ \omega_{d_i}\ (t-\tau)\ d\tau \qquad (2.10\text{-}5)$$

debido a que los índices de amortiguamiento utilizados en ingeniería estructural son muy bajos, se puede suponer que $\omega_i \simeq \omega_{di}$, y por tanto

$$\xi_{i\ )max} = \frac{\Gamma_i}{\omega_i}\ PSV\ (\omega_i\ ,\ \zeta_i) \qquad (2.10\text{-}6)$$

y como

$$PSA = \omega_i \; PSV \qquad (2.10\text{-}7)$$

resulta que

$$\xi_{i\,)\max} = \frac{\Gamma_i}{\omega_i^2} \; PSA \; (\omega_i \, , \, \zeta_i) \qquad (2.10\text{-}8)$$

ahora bien, según la transformación

$$\underset{\sim}{y} = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{\phi}^i \; \xi_i = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{y}^i \qquad (2.10\text{-}9)$$

el vector de desplazamientos máximos, para el modo i, teniendo en cuenta (2.10-8), será

$$\underset{\sim}{y}^i\,)_{\max} = \underset{\sim}{\phi}^i \; \xi_{i\,)\max} = \underset{\sim}{\phi}^i \; \frac{\Gamma_i}{\omega_i^2} \; PSA \; (\omega_i \, , \, \zeta_i) \qquad (2.10\text{-}10)$$

Por otra parte como

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\max}{}^i = \underset{\sim}{K} \; \underset{\sim}{y}^i\,)_{\max} = \omega_i^2 \; \underset{\sim}{m} \; \underset{\sim}{y}^i\,)_{\max} \qquad (2.10\text{-}11)$$

es decir las fuerzas equivalentes asociadas al modo i, teniendo en cuenta (2.10-8), serán

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\max}{}^i = \omega_i^2 \; \underset{\sim}{m} \; \underset{\sim}{\phi}^i \; \xi_{i\,)\max} = \underset{\sim}{m} \; \underset{\sim}{\phi}^i \; \Gamma_i \; PSA \; (\omega_i \, , \, \zeta_i) \qquad (2.10\text{-}12)$$

La combinación de los distintos modos puede realizarse utilizando diversas reglas. La más pesimista, que por serlo en exceso no suele utilizarse, es la que obtiene la respuesta como suma de los valores absolutos de las de cada modo

$$Z_{total} = \sum_i | \, Z_i \, | \qquad (2.10\text{-}13)$$

La más utilizada en la práctica es la combinación cuadrática (RMS), en la que la respuesta es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la respuesta de cada modo

$$Z_{total} = \sqrt{\sum_i Z_i^2} \qquad (2.10\text{-}14)$$

Esta combinación está basada en la hipótesis de que la respuesta a cada modo de vibración es una variable aleatoria gaussiana independiente, de media nula y varianza igual a la respuesta máxima. En general, la hipótesis de independencia será fiable cuando los modos de vibración estén suficientemente desacoplados (las frecuencias naturales sean muy distintas). Cuando los modos están acoplados, existen reglas mixtas que proponen combinaciones especiales para dichos modos. Dos ejemplos de este tipo de combinación son :

* **Regla de 10% (TPM).** Si la diferencia entre las frecuencias de dos modos es menor del 10%, se suma el valor absoluto de la respuesta de ambos modos, y el resultado se combina con los demás mediante la regla RMS

$$\frac{\omega_i - \omega_j}{\omega_j} < 0.1 \Rightarrow Z^* = |Z_i| + |Z_j| \qquad (2.10\text{-}15)$$

* **Regla CQC (Combinación Cuadrática Completa).** Propone un coeficiente de acoplamiento entre cada dos modos, que depende del cociente entre las frecuencias y del índice de amortiguamiento

$$Z_{total} = \sqrt{\sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} |Z_i| |Z_j|}$$

$$\varepsilon_{ii} = 1 \qquad (2.10\text{-}16)$$

$$\varepsilon_{ij} = f\left(\frac{\omega_i}{\omega_j}, \zeta \right)$$

A pesar de que el Análisis Modal Espectral está estrictamente limitado al estudio del comportamiento lineal, debido a la utilización de la superposición modal, se suele aceptar la simulación del comportamiento no lineal, introduciendo un *factor de ductilidad* que minora el espectro de respuesta.

Una de las ventajas del método de superposición modal consiste en la posibilidad de truncar dicha superposición a un número de modos M<N. Es decir, si M es el número de modos que van a utilizarse, se trata de que la ecuación

$$\underset{\sim}{y} = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{\phi}^{i}\ \xi_i$$

pueda ponerse en la forma

$$\underset{\sim}{y} = \sum_{i=1}^{M} \underset{\sim}{\phi}^{i}\ \xi_i + \sum_{j=M+1}^{N} \underset{\sim}{\phi}^{j}\ \xi_j \tag{2.10-17}$$

de este modo no sería preciso el cálculo de los modos altos. El principal problema se presenta a la hora de decidir cuántos modos se deben considerar para obtener una buena aproximación.

2.11.- MASA MOVILIZADA. NUMERO DE MODOS A SUPERPONER

La masa total movilizada por el vector de arrastre será

$$M_{T_{MOV}} = \underset{\sim}{J}^{t}\ \underset{\sim}{m}\ \underset{\sim}{J} \tag{2.11-1}$$

y como, según (2.9-14), se tiene

$$\underset{\sim}{J} = \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k\ \underset{\sim}{\phi}^{k}$$

sustituyendo la expresión anterior en (2.11-1), se obtiene

$$M_{T_{MOV}} = \left(\sum_{k=1}^{N} \Gamma_k\ (\underset{\sim}{\phi}^{k})^{t} \right) \underset{\sim}{m} \left(\sum_{k=1}^{N} \Gamma_k\ \underset{\sim}{\phi}^{k} \right) \tag{2.11-2}$$

realizando los productos y utilizando, de nuevo, la propiedad de ortogonalidad de los modos, resulta que la expresión anterior es igual a

$$M_{T_{MOV}} = \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k^2\ (\underset{\sim}{\phi}^{k})^{t}\ \underset{\sim}{m}\ \underset{\sim}{\phi}^{k} = \sum_{k=1}^{N} M_{k_{MOV}} \tag{2.11-3}$$

donde

$$M_{k_{MOV}} = \Gamma_k^2 \, (\underset{\sim}{\phi}^k)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^k \qquad (2.11\text{-}4)$$

puede considerarse como una masa movilizada en el modo j. Teniendo en cuenta (2.9-9), la expresión anterior queda como sigue

$$M_{k_{MOV}} = \Gamma_k \, \frac{(\underset{\sim}{\phi}^k)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{J}}{(\underset{\sim}{\phi}^k)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^k} \, (\underset{\sim}{\phi}^k)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^k = \Gamma_k \left[(\underset{\sim}{\phi}^k)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{J} \right] \qquad (2.11\text{-}5)$$

Utilizando como criterio para el truncamiento modal, el que los M modos a superponer movilicen el 90% de la masa total, se tendría

$$\sum_{k=1}^{N} M_{k_{MOV}} \geq 0.90 \, M_{T_{MOV}} \qquad (2.11\text{-}6)$$

No obstante, es preciso señalar que, en determinados problemas, es importante el estudio de la influencia de Modos Locales de vibración, entendiendo por éstos, los modos altos que puedan estar incluidos en aquellos que movilizan menos de un 10% de la masa total del sistema, y que, por tanto, siguiendo el criterio de truncamiento modal, generalmente aceptado, no serían tenidos en cuenta pudiendo, sin embargo, incrementar los esfuerzos de forma notable.

EJEMPLO 2.2

Calcular la masa movilizada en cada modo de vibración del pórtico del ejemplo 2.1..

. . . .

Solución :

Los resultados obtenidos en el ejemplo 2.1, proporcionaban para los Modos de Vibración los siguientes valores

Primer Modo *Segundo Modo* *Tercer Modo*

$$\underset{\sim}{\phi}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.649 \\ 0.302 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\phi}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.608 \\ -0.682 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\phi}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.541 \\ 2.441 \end{bmatrix}$$

a partir de ellos y teniendo en cuenta que la matriz de masa era

$$\underset{\sim}{m} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

es posible determinar la matriz de masa modal, véase (2.5-12),

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{\phi}^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi} =$$

$$= m \begin{bmatrix} 1 & 0.649 & 0.302 \\ 1 & -0.608 & -0.682 \\ 1 & -2.541 & 2.441 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.649 & -0.608 & -2.541 \\ 0.302 & -0.682 & 2.441 \end{bmatrix} =$$

$$= m \begin{bmatrix} 1 & 0.974 & 0.604 \\ 1 & -0.912 & -1.364 \\ 1 & -3.812 & 4.882 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.649 & -0.608 & -2.541 \\ 0.302 & -0.682 & 2.441 \end{bmatrix} =$$

$$= m \begin{bmatrix} 1.82 & 0 & 0 \\ 0 & 2.49 & 0 \\ 0 & 0 & 22.6 \end{bmatrix}$$

En el supuesto de un movimiento horizontal en la base, éste afecta a los tres grados de libertad definidos por lo que el vector de arrastre será

$$\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y según (2.11-1), la Masa Total

$$M_{T_{MOV}} = \underset{\sim}{J}^t \ \underset{\sim}{m} \ \underset{\sim}{J} =$$

$$= m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} [\ 1 \ \ 1 \ \ 1\ ]$$

$$= m \ (1+1.5+2) = 4.5m = 4.5 \ x \ 5000 = 22500 \ kg$$

Con los cálculos previamente realizados es posible determinar la masa movilizada por cada modo

*** Primer Modo**

$$(\underset{\sim}{\phi}^1)^t \ \underset{\sim}{m} \ \underset{\sim}{J} = m \ [\ 1 \ \ 0.974 \ \ 0.604\ ] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2.58 \ m$$

$$M_1 = (\underset{\sim}{\phi}^1)^t \ \underset{\sim}{m} \ \underset{\sim}{\phi}^1 = 1.82 \ m$$

$$\Gamma_1 = \frac{(\underset{\sim}{\phi}^1)^t \ \underset{\sim}{m} \ \underset{\sim}{J}}{M_1} = \frac{2.58 \ m}{1.82 \ m} = 1.42$$

$$M_{1_{MOV}} = \Gamma_1 \, (\underset{\sim}{\phi}^1)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{J} = 1.42 \; x \; 2.58 \; m =$$

$$= 1.42 \; x \; 2.58 \; x \; 5000 = 18318 \; kg$$

$$\Downarrow$$

$$M_{1_{MOV}} = 81.4 \; \% \; M_{T_{MOV}}$$

*** Segundo Modo**

$$(\underset{\sim}{\phi}^2)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{J} = m \, [\; 1 \quad -0.912 \quad -1.364 \;] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1.28 \; m$$

$$M_2 = (\underset{\sim}{\phi}^2)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^2 = 2.49 \; m$$

$$\Gamma_2 = \frac{(\underset{\sim}{\phi}^2)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{J}}{M_2} = \frac{-1.28 \; m}{2.49 \; m} = -0.51$$

$$M_{2_{MOV}} = \Gamma_2 \, (\underset{\sim}{\phi}^2)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{J} = (-0.51) \; x \; (-1.28) \; m =$$

$$= 0.51 \; x \; 1.28 \; x \; 5000 = 3264 \; kg$$

$$\Downarrow$$

$$M_{2_{MOV}} = 14.5 \; \% \; M_{T_{MOV}}$$

*** Tercer Modo**

$$(\underset{\sim}{\phi}^3)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{J} = m \, [\; 1 \quad -3.812 \quad 4.882 \;] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \cancel{2.07} \; m$$

$$M_3 = (\underset{\sim}{\phi}^3)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{\phi}^3 = 22.6 \; m$$

$$\Gamma_3 = \frac{(\underset{\sim}{\phi}^3)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{J}}{M_2} = \frac{-2.07 \; m}{22.6 \; m} = 0.09$$

$$M_{3_{MOV}} = \Gamma_3 \, (\underset{\sim}{\phi}^3)^t \, \underset{\sim}{m} \, \underset{\sim}{J} = 0.09 \; x \; 2.07 \; m =$$

$$= 0.09 \; x \; 2.07 \; x \; 5000 = 931.5 \; kg$$

$$\Downarrow$$

$$M_{3_{MOV}} = 4.1 \; \% \; M_{T_{MOV}}$$

2.12.- SISTEMAS CON PARÁMETROS DISTRIBUIDOS

En los apartados anteriores se ha analizado un procedimiento cuyo desarrollo ha sido posible gracias al hecho de haber considerado que las masas que intervenían en el problema estaban concentradas en los grados de libertad de la estructura. El problema que se plantea ahora es como determinar una matriz de masas discretas cuando la masa está repartida de forma continua a lo largo de la estructura. El procedimiento que se utiliza es la reducción del número de grados de libertad, es decir la discretización de la estructura. Este proceso se apoya en dos puntos fundamentales:

* El Principio de los Trabajos Virtuales (P.T.V.), como expresión del equilibrio entre las energías cinética y potencial del sistema.

* Una aproximación de la solución como combinación lineal de funciones conocidas.

La idea tuvo su origen en Rayleigh, fue continuada por Ritz y su desarrollo actual mas conocido es el Método de los Elementos Finitos.

En particular, por ejemplo, para el caso de la barra a flexión

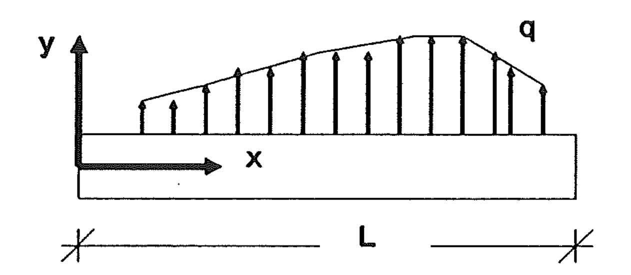


Fig. 2.9.

si:

E es modulo de Young del material
I el momento de inercia de la sección transversal
q la carga repartida por unidad de longitud
ψ_i **(x)** una función conocida, perteneciente a una familia **{** ψ_i **(x) }** que cumple las condiciones de contorno esenciales. Por ejemplo, **sen 2πx/L** en **{ sen iπx /L }**

el P.T.V. se escribe

$$\left| \psi_i Q - \frac{d\psi_i}{dx} M \right|_o^L + \int_o^L \frac{d^2\psi_i}{dx^2} EI \frac{d^2y}{dx^2} dx = \int_o^L q \psi_i dx \qquad (2.12\text{-}1)$$

donde los diferentes términos representan

ψQ : *Trabajo de los cortantes*

$\frac{d\psi}{dx} M$: *Trabajo de los Flectores*

$\int_o^L \frac{d^2\psi}{dx^2} EI \frac{d^2y}{dx^2} dx$: *Trabajo de los Flectores en las curvaturas ficticias*

$\int_o^L q \psi dx$: *Trabajo de las cargas exteriores*

(2.12-2)

y al cumplir las funciones ψ_i (x) las condiciones de contorno esenciales, entonces (2.12-1) puede escribirse en la forma

$$\int_o^L \frac{d^2\psi_i}{dx^2} EI \frac{d^2y}{dx^2} dx = \int_o^L q \ \psi_i \ dx \qquad (2.12\text{-}3)$$

En el caso dinámico, la carga repartida **q** está formada por

* la carga real actuando sobre la pieza **p(x,t)**
* las fuerzas disipativas $c(x) \ \dot{y}(x,t)$
* las fuerzas de inercia $m(x) \ \ddot{y}(x,t)$

$$q(x,t) = p(x,t) - m(x) \ \ddot{y}(x,t) - c(x) \ \dot{y}(x,t) \qquad (2.12\text{-}4)$$

donde se ha supuesto que, **m(x)** es la masa repartida por unidad de longitud, dependiente del espacio pero no del tiempo; y **c(x)** el amortiguamiento viscoso repartido por unidad de longitud.

Sustituyendo (2.12-4) en (2.12-3), y reordenando se obtiene

$$\begin{aligned} &\int_0^L m(x) \ \psi_i(x) \ \frac{d^2y(x,t)}{dt^2} dx + \int_0^L c(x) \ \psi_i(x) \ \frac{dy(x,t)}{dt} dx + \\ &+ \int_0^L \frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2} EI(x) \ \frac{d^2y(x,t)}{dx^2} dx = \int_0^L p(x,t) \ \psi_i(x) \ dx \end{aligned} \qquad (2.12\text{-}5)$$

si ahora se aproxima la solución real mediante una combinación lineal de funciones $\{ \psi_j (x) \}$, es decir

$$y(x,t) \approx \sum_{j=1}^{N} a_j(t) \ \psi_j(x) \qquad (2.12\text{-}6)$$

es inmediato

$$\begin{aligned} \dot{y}(x,t) &\approx \sum_{j=1}^{N} \dot{a}_j(t) \ \psi_j(x) \\ \ddot{y}(x,t) &\approx \sum_{j=1}^{N} \ddot{a}_j(t) \ \psi_j(x) \end{aligned} \qquad (2.12\text{-}7)$$

Puesto que (2.12-5) expresa el reparto de energía, introducida por las cargas p(x,t) en la estructura, entre los términos de inercia, disipativo y elástico; surge la idea de determinar los N coeficientes a_j (t) imponiendo repetidamente (2.12-5) para N funciones ψ_j (x). Obteniéndose

$$\sum_{j=1}^{N} \left[m_{ij} \ddot{a}_j (t) + c_{ij} \dot{a}_j (t) + k_{ij} a_j (t) \right] = p_i (t) \qquad (2.12\text{-}8)$$

$$\forall\, i = 1, 2, , \dots , N$$

donde se ha hecho

$$m_{ij} = \int_0^L \psi_i(x)\; m(x)\; \psi_j(x)\; dx$$

$$(2.12\text{-}9)$$

$$c_{ij} = \int_0^L \psi_i(x)\; c(x)\; \psi_j(x)\; dx$$

$$k_{ij} = \int_0^L \frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2}\; EI(x)\; \frac{d^2\psi_j(x)}{dx^2}\; dx$$

$$(2.12\text{-}10)$$

$$p_i (t) = \int_o^L p(x,t)\; \psi_i(x)\; dx$$

por lo que en notación matricial, la ecuación (2.12-8), queda como sigue

$$\underset{\sim}{m}\, \underset{\sim}{\ddot{a}} + \underset{\sim}{c}\, \underset{\sim}{\dot{a}} + \underset{\sim}{k}\, \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{f} \qquad (2.12\text{-}11)$$

sistema de ecuaciones diferenciales formalmente análogo al (2.8-1); la única diferencia existente entre ambos estriba en el hecho de que las matrices $\underset{\sim}{m}$ y $\underset{\sim}{c}$ no tienen porqué ser diagonal.

$\underset{\sim}{m}$ y $\underset{\sim}{c}$ son las denominadas ***matrices de masa y amortiguamiento consistente*** con la matriz de rigidez $\underset{\sim}{k}$, debido a que la discretización se consigue utilizando las mismas funciones de interpolación en ambos casos.

Como ya se ha mencionado previamente la matriz de masa consistente o congruente es llena, lo que contrasta con las matrices de masa diagonales correspondientes a las masas concentradas. Debido a que es preferible trabajar con

este último tipo de matrices, se suelen concentrar los valores obtenidos por algún procedimiento más o menos heurístico. Aunque ello introduce una inconsistencia en la formulación teórica tiene ventajas computacionales no despreciables y, dependiendo del tipo de problema, puede producir buenos resultados.

Así, por ejemplo, a veces suele tomarse como matriz de masa la siguiente

$$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_N \end{bmatrix}$$

donde

$$m_i = \frac{m_{ii}}{\sum_{i=1}^{N} m_{ii}} M$$

M = *masa total del sistema*

$\sum_{i=1}^{N} m_{ii}$ = *traza de la matriz consistente*

Una idea que se aplica con frecuencia y que es la más sencilla consiste en construir la matriz de masa del sistema suponiendo la masa concentrada en los g.d.l. de traslación; la masa asociada al giro se supondrá nula si considera la hipótesis de concentrar la masa en puntos sin inercia de rotación. Para ello se considera subdividida a la estructura en elementos; la masa de cada elemento se supone concentrada en los nudos extremos, asignando a cada nudo la mitad de la masa de elemento, tal y como se indica en el ejemplo 2.3.

EJEMPLO 2.3

Estudiar las vibraciones laterales de un edificio formado por una serie de pórticos espaciados 5 m. El peso de los forjados es de 500 y 250 kg/m², y el de los muros 100 kg/m².

DATOS:
* $E = 2.1 \times 10^6$ kg/cm²
* $I_1 = 10200$ cm⁴
* $I_2 = 4400$ cm⁴

. . . .

Solución :

En la figura E.2.3-1 se presenta el esquema de uno de los pórticos interiores del edificio

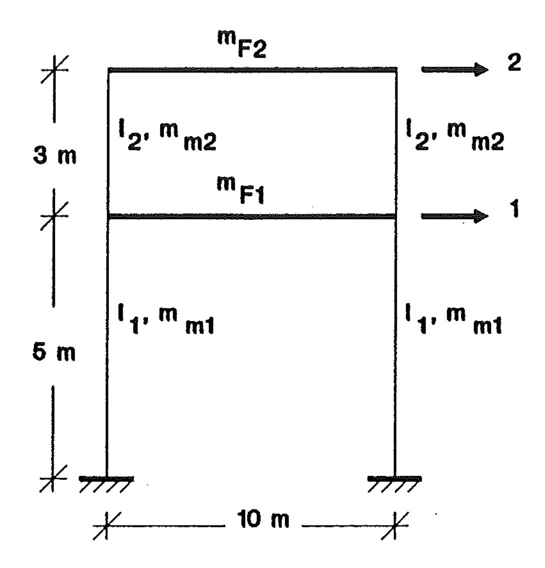
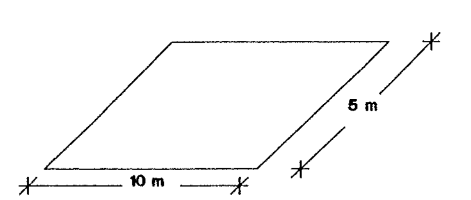


Fig. E.2.3-1

*** Peso de los forjados**

$A_F = 5 \ x \ 10 = 50 \ m^2$



$* \ P_{F1} = 500 \ \frac{kg}{m^2} \ x \ 50 \ m^2 =$

$= 25000 \ kg = 25 \ x \ 10^4 \ N$

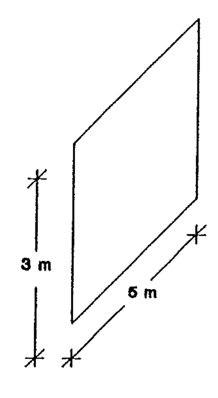
$m_{F1} = 25 \ x \ 10^3 \ kg$

$* \ P_{F2} = 250 \ \frac{kg}{m^2} \ x \ 50 \ m^2 =$

$= 12500 \ kg = 12.5 \ x \ 10^4 \ N$

$m_{F2} = 12.5 \ x \ 10^3 \ kg$

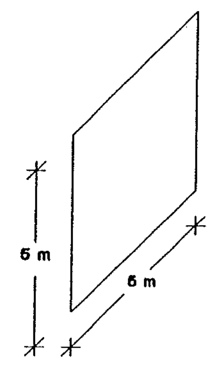
*** Peso de los muros**



$$A_{m2} = 5 \ x \ 3 = 15 \ m^2$$

$$P_{m2} = 100 \ \frac{kg}{m^2} \ x \ 15 \ m^2 = 1500 \ kg = 15000 \ N$$

$$m_{m2} = 1500 \ kg$$



$$A_{m1} = 5 \ x \ 5 = 25 \ m^2$$

$$P_{m1} = 100 \ \frac{kg}{m^2} \ x \ 25 \ m^2 = 2500 \ kg = 25000 \ N$$

$$m_{m1} = 2500 \ kg$$

A la vista de lo anterior el modelo utilizado de masas concentradas sería el indicado en la figura E.2.3-2

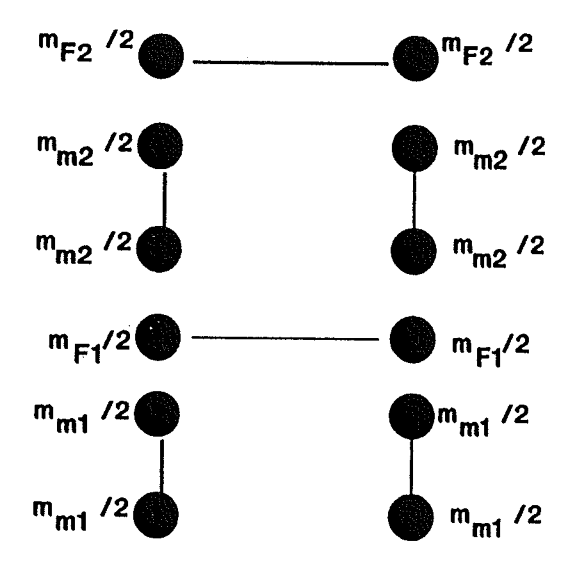


Fig. E.2.3-2

por lo que las masas concentradas en los grado de libertad de traslación son

$$m_1 = m_{F1} + m_{m2} + m_{m3}$$

$$= 25000 + 1500 + 2500 = 29000 \ kg$$

$$m_2 = m_{F2} + m_{m2} =$$

$$= 12500 + 1500 = 14000 \ kg$$

$m_2 = m_{F2} + m_{m2}$

$m_1 = m_{F1} + m_{m2} + m_{m1}$

Fig. E.2.3-3

pudiendo escribirse la matriz de masa en la forma

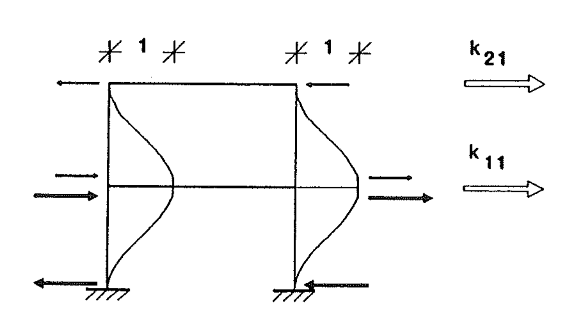
$$\underset{\sim}{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 29 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$$

siendo la matriz de rigidez

$$\underset{\sim}{k} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = 24E \begin{bmatrix} \frac{I_1}{L_1^3} + \frac{I_2}{L_2^3} & -\frac{I_2}{L_2^3} \\ -\frac{I_2}{L_2^3} & \frac{I_2}{L_2^3} \end{bmatrix}$$

obtenida por el mismo procedimiento utilizado en el ejemplo E.2.1. Así, para los dos grados de libertad indicados, *la columna i* son las *fuerzas que aparecen en los g.d.l. j* al dar *un desplazamiento unidad en el g.d.l. i, manteniendo impedidos el resto de los grados de libertad*. De este modo

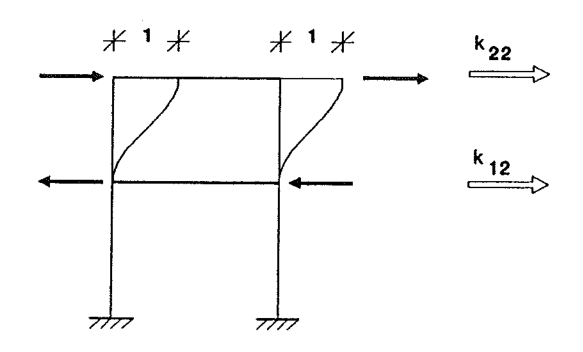
- 1ª Columna : k_{j1} , j = 1 y 2



$$k_{21} = \frac{-24EI_2}{L_2^3}$$

$$k_{11} = \frac{24EI_2}{L_2^3} + \frac{24EI_1}{L_1^3}$$

- 2ª Columna : k_{j2} , j = 1 y 2



$$k_{22} = \frac{24EI_2}{L_2^3}$$

$$k_{12} = -\frac{24EI_2}{L_2^3}$$

y como

* $L_1 = 5\ m$

$$EI_1 = 2\ 10^6\ \frac{kg}{cm^2}\ x\ 10200\ cm^4 = 204\ x\ 10^8\ kg\ cm^2 = 204\ x\ 10^5\ N\ m^2$$

* $L_2 = 3\ m$

$$EI_2 = 2\ 10^6\ \frac{kg}{cm^2}\ x\ 4400\ cm^4 = 88\ x\ 10^8\ kg\ cm^2 = 88\ x\ 10^5\ N\ m^2$$

resulta

$$* \; k_1 = \frac{24EI_1}{L_1^3} = \frac{24 \; x \; 204 \; x \; 10^5}{5^3} \; \frac{N}{m} = 39.168 \; x \; 10^5 \; \frac{N}{m}$$

$$* \; k_2 = \frac{24EI_2}{L_2^3} = \frac{24 \; x \; 88 \; x \; 10^5}{3^3} \; \frac{N}{m} = 78.222 \; x \; 10^5 \; \frac{N}{m}$$

Las frecuencias propias se obtendrán al imponer la condición

$$| \underset{\sim}{k} - \omega^2 \underset{\sim}{m} | = 0$$

que, en este caso, puede expresarse como

$$\begin{vmatrix} (k_1+k_2) - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

lo que proporciona una ecuación de segundo grado en ω^2

$$\left[(k_1+k_2) - \omega^2 m_1\right]\left[k_2 - \omega^2 m_2\right] - k_2^2 = 0$$

es decir

$$\omega^2 = \frac{[\, m_2 \, (k_1 + k_2) + m_1 \, k_2 \,] \pm \sqrt{[\, m_2 \, (\, k_1 + k_2 \,) + k_2 \, m_1 \,]^{\,2} - 4k_1k_2 \, m_1m_2}}{2 \, m_1 \, m_2}$$

para este caso particular se obtiene

$$\omega_1^2 = 85.995$$

$$\omega_2^2 = 877.529$$

siendo entonces las frecuencias propias

$$\omega_1 = 9.273 \; rd/seg \quad ; \quad T_1 = 0.678 \; seg$$

$$\omega_2 = 29.623 \; rd/seg \quad ; \quad T_2 = 0.212 \; seg$$

2.13.-BIBLIOGRAFÍA

1. **ALARCON, E.: "Efectos dinámicos aleatorios en túneles y obras subterráneas"**. Fundación Juan March. Serie Universitaria, nº 36. (1977).

2. **ALARCON, E., ALVAREZ, R. , GÓMEZ LERA, Mª S.: "Cálculo Matricial de Estructuras"**. Ed. Reverté. (1990).

3. **ALARCON, E., BREBBIA, C., HACAR BENITEZ, M.A.. Y SANMARTIN, A.: "Cálculo dinámico en la ingeniería civil"**. Ed. Servicio de Publicaciones de la E.T.S.I.C.C.P. Madrid. 2ª Edición. (1974).

4. **ARYA, S.C., O'NEILL, MICHAEL, W., AND PINCUS, G.: "Design of structures and foundations for vibrating machines"**. Ed. Gulf Publishing Company. (1979).

5. **BATHE, KLAUS-JÜRGEN.: "Finite Element Procedures in Engineering Analysis"**. Ed. Prentice-Hall. (1982).

6. **BOLT, B.A.: "Terremotos"**. Ed. Reverté. (1981).

7. **CLOUGH, RAY W. AND PENZIEN, I.: "Dynamics of Structures"**. Ed. McGraw-Hill. (1975).

8. **CHOPRA, A.K.: "Dynamics of Structures a Primer"**. Ed. Earthquake Engineering Research Institute. Berkeley (California). (1980).

9. **DOWRICK, D.J.: "Diseño de estructuras resistentes a sismos"**. Ed. Limusa. (1984).

10. **HACAR, M.A. y ALARCON, E.: "Elementos de dinámica aplicada a las estructuras"**. Ed. Edix. (1971).

11. **HATTER, D.J.: "Matrix Computer Methods of Vibration Analysis"**. Ed. London Butterworths. (1973).

12. **HUDSON, D.E.: "Reading and interpreting strong motion accelerograms"**. Ed. Earthquake Engineering Research Institute. Berkeley (California). (1979).

13. **HURTY, WALTER, C. AND RUBINSTEIN, M.F.: "Dynamics of structures"**. Ed. Prentice Hall. (1964).

14. **NEWMARK, N.M. AND ROSENBLUETH, E.: "Fundamentos de Ingeniería Sísmica"**. Ed. Diana. México. (1971).

15. **RAO, S.S.: "Mechanical Vibrations"**. Ed. Addison Wesley. (1990).

16. **SMITH, J.W.: "Vibration of Structures. Applications in civil engineering design"**. Ed. Chapman & Hall. (1988).

17. **WEAVER, W., TIMOSHENKO, S.P., YOUNG, D.H.: "Vibration Problems in engineering "**. Ed. John Wiley & Sons. Fifth Edition. (1990).